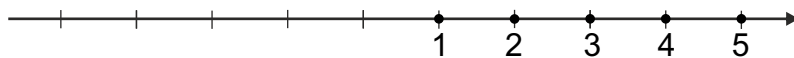


Wszystko, co ósmoklasista(a/ka) powinien wiedzieć o przedziałach liczbowych

Aby zajmować się przedziałami liczbowymi trzeba przypomnieć podstawowy podział znanych nam liczb:

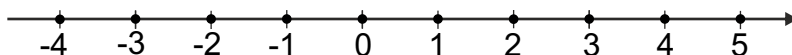
- liczby **naturalne** to liczby 1, 2, 3, ... (każda następna o 1 większa od poprzedniej) - symbol **N** lub $\mathbb{N}$

Na osi są to tylko punkty.



- liczby **całkowite** to liczby naturalne 1, 2, 3, ... , przeciwne do nich -1, -2, -3, ... i liczba 0 - symbol **C**

Na osi są to tylko punkty.



- liczby **wymierne** to **ułamki** - symbol **W**

Uwaga! Liczby naturalne i całkowite to też liczby wymierne, bo da się ich przedstawić ułamkiem:

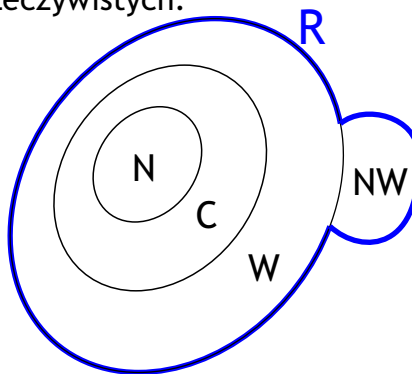
$$\text{np.: } 3 = \frac{3}{1} \quad -5 = \frac{-5}{1}$$

Liczby okresowe, np. 2,(1) czyli 2,11111... to też liczby wymierne, bo da się je przedstawić ułamkiem.

- liczby **niewymierne** (NW) to te, które nie dadzą się przedstawić ułamkiem, np. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, itp.

- liczby **rzeczywiste** (R) to wszystkie liczby poznane w szkole podstawowej.

Podany wykaz można przedstawić grafem, który pokazuje, że liczby naturalne zawierają się w liczbach całkowitych, te są częścią liczb wymiernych, a jak dodamy do nich jeszcze liczby niewymierne, to otrzymamy **wszystkie** liczby, czyli zbiór liczb rzeczywistych.



Aby zapisać, że dana liczba należy do danego zbioru używamy symbolu $\in$, który czytamy **należy do**,

np. $5 \in \mathbb{N}$, $-11 \in \mathbb{C}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{W}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{NW}$

Ten symbol $\notin$ czytamy **nie należy do**.

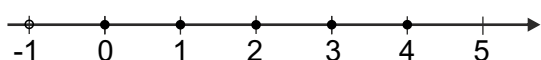
PRZEDZIAŁY LICZBOWE

Przedział liczbowy to zbiór liczb zawarty pomiędzy dwiema wartościami, które nazywamy końcami przedziału.

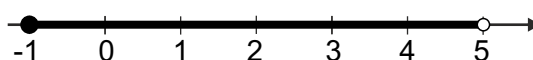
Przedział liczbowy można określić na kilka sposobów (*każdy zostanie potem omówiony osobno, a pokazane w dalszej części przykłady będą opisywać przedziały wszystkimi sposobami*):

- **słownie**, np.: Uczniowie od numeru 5 do 10. lub Wszystkie liczby większe od 5.

- **na osi liczbowej**, np.:



lub



- **z użyciem symbolu $\in$** , np.: $x \in (2, 9)$

- **z użyciem znaków $>$, $\geq$, $<$, $\leq$** np.: $x > 0$ lub $x > -10$ i $x \leq 10$ lub $-5 \leq x < 8$

Omówienie kolejnych sposobów opisania przedziałów liczbowych

1. Opis (zapis) słowny

Opis słowny powinien precyzyjnie określać zakres liczb. W przykładzie „Wszyscy uczniowie od numeru 5 do 11” jest prawie pewne, że albo uczeń z numerem 5 albo ten z 11 zapytają „Czy oni też?”. Dlatego aby określenie było precyzyjne, często dodaje się wyraz „włącznie”, co ma szczególne znaczenie w pismach formalnych i urzędowych, w których określenie „do 20 marca” brzmi często „do 20 marca włącznie” (pamiętajmy bowiem, że są kraje, w których „do 20 marca” domyślnie wyłącza dzień 20 marca z przedziału).

Przykłady precyzyjnego określania przedziałów w formie słownej:

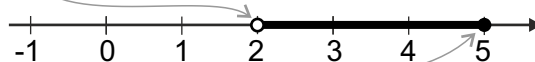
- liczby większe od 1 (tutaj jest jasne, że jeden nie należy do tego przedziału, bo są w nim liczby tylko większe od 1)
- liczby większe lub równe 1 (tutaj 1 należy już do tego przedziału)
- liczby do co najwyżej 10 (tutaj 10 kończy przedział i należy do niego)
- liczby od co najmniej 10 (tutaj 10 zaczyna przedział i należy do niego)

2. Zaznaczenie na osi liczbowej

Aby jednoznacznie zaznaczać przedziały na osi liczbowej, musimy przyjąć jakiś symbol, który będzie informował, że liczba z końców przedziału należy do niego, czy nie. Takim symbolem jest puste lub zamalowane kółko:

Przykład - liczby większe od 2 ale mniejsze lub równe 5

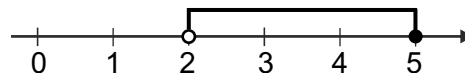
puste kółko dla 2 oznacza, że przedział zaczyna się od 2, ale samo 2 jeszcze do niego **nie należy**



pełne (zamalowane) kółko dla 5 oznacza, że przedział kończy się na 5 włącznie, czyli 5 **należy** do tego przedziału

Przedział na osi zaznacza się też tak:

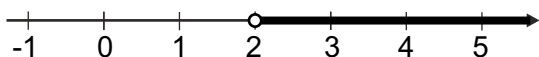
Przykład - liczby większe od 2 ale mniejsze lub równe 5



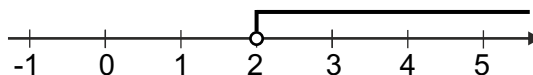
Który sposób jest lepszy (pogrubianie osi czy takie górne zaznaczanie)? Oba sposobów można używać wymiennie zależnie od np. ilości przedziałów, jakie chcemy przedstawić na jednej osi.

Co w sytuacji, w której przedział nie ma końca?

Przykład - liczby większe od 2



lub



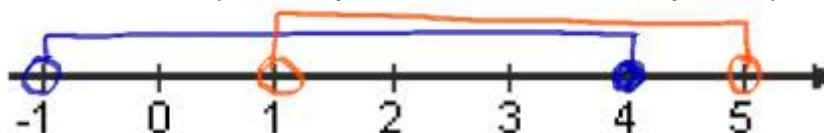
Często rysujemy kółko już po zaznaczonym przedziale i wtedy „nie jest całkiem puste”:

Przykład - liczby większe od 2



Jeżeli widać chociaż trochę pustego kółka, to wszystko jest w porządku.

Jeżeli mamy na osi zaznaczyć kilka przedziałów, to dobrze jest użyć kolorów.



3. Użycie symbolu $\in$

Tutaj również musi się pojawić jakieś oznaczenie mówiące, czy krańce przedziałów należą czy nie należą do przedziału - są to takie symbole: nawiasy zwykłe $()$ i nawiasy ostre $\langle \rangle$.

Obowiązuje taka reguła:

Nie myl tych znaków ze znakami większości i mniejszości $\langle \rangle$

nawias zwykły (otwarty) - liczba przy nim nie należy do przedziału
(to jak puste kółko na osi)

nawias ostry (zamknięty) - liczba przy nim należy do przedziału
(to jak zamalowane kółko na osi)

Przykład - liczby x większe od 2 ale mniejsze lub równe 5

$x \in (2, 5]$
nawias zwykły - liczba 2 nie należy do przedziału
nawias ostry - liczba 5 należy do przedziału

Inne spotykane symbole i oznaczenia to:

Przykłady $x \in \langle 2; 5 \rangle$
średnik zamiast przecinka

$x \in [2, 5]$
nawiasy prostokątne zamiast ostrych

Co w sytuacji, w której przedział nie ma końca?

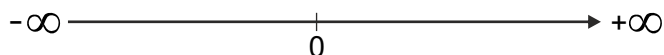
Przykład - liczby x większe od 1

Zapis z użyciem symbolu $\in$ wyglądał by tak: $x \in (1, \text{do nieskończoności})$

Jeszcze w XVII wieku wymyślono na określenie nieskończoności symbol: ∞

Tak więc nasz zapis przedziału x większe od 1 wygląda tak: $x \in (1, \infty)$ lub $x \in (1, +\infty)$

Znaki plus i minus określają o „którą nieskończoność” nam chodzi, czy tą z coraz większymi liczbami dodatnimi, czy coraz mniejszymi ujemnymi - na osi liczbowej wygląda to tak:



Przy obu nieskończonościach zawsze piszemy nawiasy otwarte (nie znamy przecież ostatniej liczby!)

4. Użycie znaków $>$, $\geq$, $<$, $\leq$

Tak na wszelki wypadek:

- $>$ większe od ...
- $\geq$ większe lub równe od ...
- $<$ mniejsze od ...
- $\leq$ mniejsze lub równe od ...

Przykłady - liczby x większe od 2 $x > 2$ (większe, czyli samo 2 **nie należy** jeszcze do przedziału)

- liczby x większe lub równe 2 $x \geq 2$ (lub równe 2, czyli samo 2 **należy** do przedziału)

- liczby x mniejsze od 5 $x < 5$ (mniejsze, czyli samo 5 **nie należy** już do przedziału)

- liczby x mniejsze lub równe 5 $x \leq 5$ (lub równe 5, czyli samo 5 **należy** do przedziału)

Kolejne przykłady dotyczą przedziałów mających skończony zakres:

Przykłady - liczby x większe od 2 i mniejsze od 5 $x > 2$ i $x < 5$

- liczby x od co najmniej 2 do co najwyżej 5 $x \geq 2$ i $x \leq 5$

Ostatnie dwa przykłady to „podwójne” zapisy połączone „i” - częściej zapisuje się je tak:

liczba z lewego krańca przedziału $<$ lub $\leq$ x $<$ lub $\leq$ liczba z prawego krańca przedziału

Przykłady - liczby x większe od 2 i mniejsze od 5

$$2 < x < 5$$

mamy w tym jednym zapisie dwa wcześniejsze:

$$x > 2 \quad \text{i} \quad x < 5$$

x jest większe od 2,
czyli inaczej 2 jest mniejsze od x

$$2 < x$$

Ostatecznie:

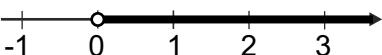
$$2 < x < 5$$

Janek jest wyższy od Adama,
Janek $>$ Adam
czyli Adam jest niższy od Janka
Adam $<$ Janek

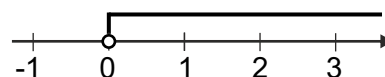
Przykłady przedziałów liczbowych opisywanych na wszystkie 4 sposoby

Przykład 1

- **słownie:** „liczby większe od 0”

- **na osi liczbowej:** 

lub



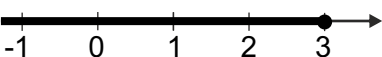
- **z użyciem symbolu $\in$** $x \in (0, +\infty)$

(pojawilo się x, bo musimy jakoś nazwać nasze liczby z tego przedziału - zamiast x może być inna litera)

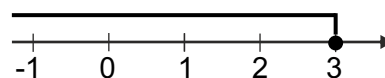
- **z użyciem znaków mniejszy/większy:** $x > 0$

Przykład 2

- **słownie:** „liczby nie większe od 3”

- **na osi liczbowej:** 

lub

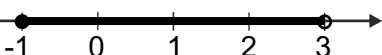


- **z użyciem symbolu $\in$** $x \in (-\infty, 3)$ lub $x \in (-\infty, 3]$

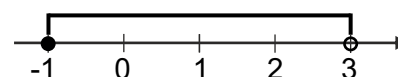
- **z użyciem znaków mniejszy/większy:** $x \leq 3$

Przykład 3

- **słownie:** „liczby większe od -1 (włącznie) do 3 (ale bez trójki)”

- **na osi liczbowej:** 

lub



- **z użyciem symbolu $\in$** $x \in [-1, 3)$ lub $x \in [-1, 3)$

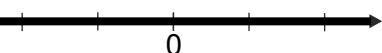
- **z użyciem znaków mniejszy/większy:**

$$x \geq -1 \text{ i } x < 3 \text{ lub } -1 \leq x < 3$$

przepisujemy tę liczbę
a ten znak odwracamy

Przykład 4

- **słownie:** „wszystkie liczby rzeczywiste”

- **na osi liczbowej:** 

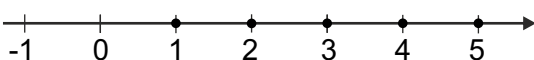
- **z użyciem symbolu $\in$** $x \in (-\infty, +\infty)$

- **z użyciem znaków mniejszy/większy:** $x > -\infty$ i $x < +\infty$ lub $-\infty < x < +\infty$

Co w sytuacji, w której interesują nas tylko liczby naturalne lub całkowite?

Przykład 5

- **słownie:** „liczby naturalne od 1 (włącznie) do 5 (włącznie)”

- **na osi liczbowej:** 

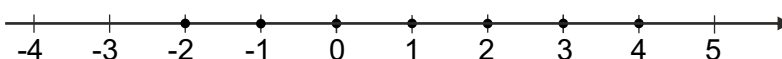
- **z użyciem symbolu $\in$** $x \in \langle 1, 5 \rangle; x \in \mathbb{N}$ lub $x \in [1, 5]; x \in \mathbb{N}$

Musiał pojawić się dodatkowy zapis, że x to tylko liczby naturalne z tego przedziału

- **z użyciem znaków mniejszy/większy:** $x \geq 1$ i $x \leq 5$ i $x \in \mathbb{N}$ lub $1 \leq x \leq 5$ i $x \in \mathbb{N}$

Przykład 6

- **słownie:** „liczby całkowite od co najmniej -2 do nie większych od 4”

- **na osi liczbowej:** 

- **z użyciem symbolu $\in$** $x \in \langle -2, 4 \rangle; x \in \mathbb{C}$ lub $x \in [-2, 4]; x \in \mathbb{C}$

Musiał pojawić się dodatkowy zapis, że x to tylko liczby całkowite z tego przedziału

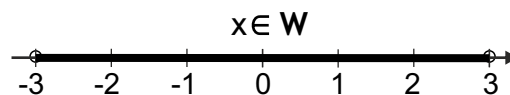
- **z użyciem znaków mniejszy/większy:** $x \geq -2$ i $x \leq 4$ i $x \in \mathbb{C}$ lub $-2 \leq x \leq 4$ i $x \in \mathbb{C}$

Przykład 7

- **słownie:** „ułamki większe od -3 ale mniejsze od 3”

- **na osi liczbowej:** Nie jesteśmy w stanie zaznaczyć na osi tylko ułamki, więc jedynym sposobem pokazania tego przedziału na osi byłby ten:

Zaznaczamy przedział tak, jak dla liczb rzeczywistych, ale koniecznie dodajemy informację, że interesują nas tam tylko liczby wymierne (czyli ułamki).



- **z użyciem symbolu $\in$** $x \in (-3, 3); x \in \mathbb{W}$

Tutaj również musiał pojawić się dodatkowy zapis, że x to tylko liczby wymierne z tego przedziału

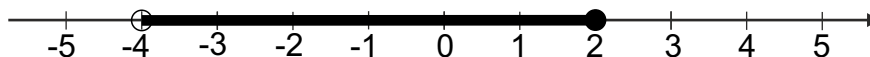
- **z użyciem znaków mniejszy/większy:** $x > -3$ i $x < 3$ i $x \in \mathbb{W}$ lub $-3 < x < 3$ i $x \in \mathbb{W}$

Przykłady zadań z podaniem przedziału na wszystkie 4 sposoby

Ćwiczenie 1

Przedstaw jeszcze trzema innymi sposobami ten przedział: $x \in (-4, 2)$

- słownie: liczby od -4 (bez -4) do 2 (włącznie) lub liczby większe od -4 ale mniejsze lub równe 2
- na osi liczbowej: przed -4 mamy nawias zwykły, więc -4 jeszcze nie należy do tego przedziału i kółko będzie puste, a przy 2 mamy nawias ostry, co oznacza, że 2 jeszcze należy do przedziału, więc kółko będzie pełne (zamalowane).

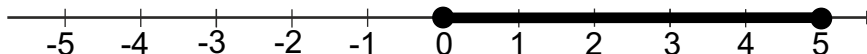


- ze znakami mniejszy/większy: $x > -4$ i $x \leq 2$ lub $-4 < x \leq 2$
przepisujemy tę liczbę
a ten znak odwracamy

Ćwiczenie 2

Przedstaw jeszcze trzema innymi sposobami ten przedział: $0 \leq x \leq 5$

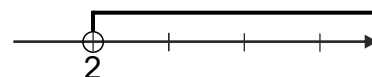
- na osi liczbowej: zaznaczamy liczby od 0 do 5, a że znaki mówią „lub równy”, to kółka będą zamalowane (krańce przedziałów należą do tego przedziału)



- z symbolem $\in$ $x \in \langle 0, 5 \rangle$ lub $x \in [0, 5]$
- słownie: liczby od 0 (włącznie) do 5 (włącznie)
lub liczby większe lub równe 0 ale mniejsze lub równe 5

Ćwiczenie 3

Przedstaw jeszcze trzema innymi sposobami ten przedział:

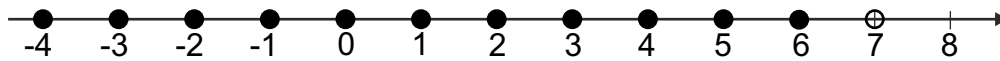


- z symbolem $\in$ $x \in (2, +\infty)$
- słownie: liczby większe od 2
- ze znakami mniejszy/większy: $x > 2$

Ćwiczenie 4

Przedstaw jeszcze trzema innymi sposobami ten przedział: „liczby całkowite mniejsze od 7”

- na osi liczbowej: liczby mają być tylko mniejsze od 7, więc albo 7 w kółku pustym, albo zakończyć przedział pełnym kółkiem dla 6 (bo to tylko liczby całkowite).

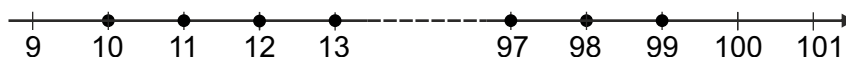


- ze znakami mniejszy/większy: $x < 7; x \in \mathbb{C}$
- z symbolem $\in$ $x \in (-\infty, 7); x \in \mathbb{C}$

Ćwiczenie 5

Przedstaw jeszcze trzema innymi sposobami ten przedział: „liczby naturalne dwucyfrowe”

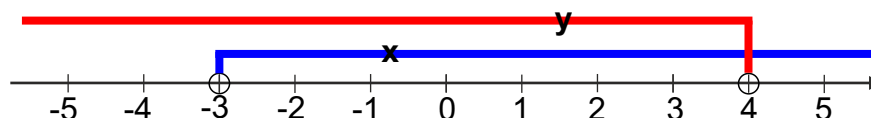
- na osi liczbowej: liczby naturalne dwucyfrowe zaczynają się od 10 i kończą na 99. Przy tak długich przedziałach możemy część osi zaznaczyć przerywaną linią.



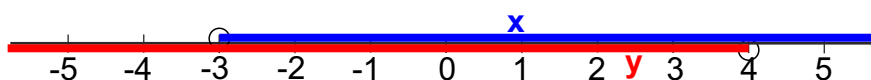
- ze znakami mniejszy/większy: $x \geq 10$ i $x \leq 99$ i $x \in \mathbb{N}$ lub $10 \leq x \leq 99$ i $x \in \mathbb{N}$
- z symbolem $\in$ $x \in \langle 10, 99 \rangle; x \in \mathbb{N}$

Ćwiczenie 6

Przedstaw na jednej osi liczbowej dwa przedziały: liczby x większe od -3 i liczby y mniejsze od 4.

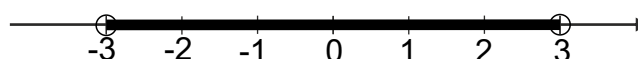


lub



Ćwiczenie 7

Zapisz w jak najkrótszej postaci ten przedział:



$$|x| < 3$$

O wartości bezwzględnej z liczby możesz przypomnieć sobie [TUTAJ](#).