



Próbnny egzamin ósmoklasisty
Matematyka
marzec 2020 r.

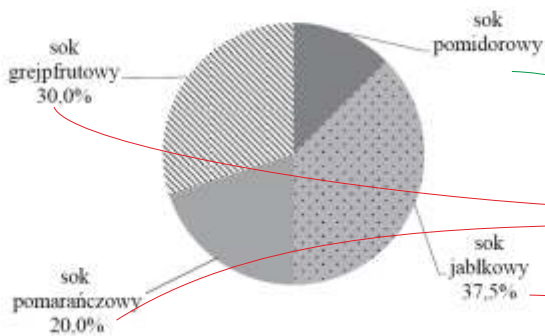
Rozwiązania z wyjaśnieniami

Każde zadanie na osobnej kartce

Rozwiązania zadań z egzaminu próbnego klasa 8 - matematyka

Zadanie 1. (0-1)

Na diagramie kołowym przedstawiono procentowy udział soków o różnych smakach, które zostały sprzedane podczas festynu. Najmniej sprzedano soku pomidorowego, tylko 15 kartonów, a najwięcej – soku jabłkowego.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Sprzedano łącznie 125 kartonów soków.	P	F
Sprzedano o 30 kartonów więcej soku jabłkowego niż pomidorowego.	P	F

Aby ocenić podane w pytaniu zdania, należy obliczyć co się da z wykresu.

1. Tylko sok pomidorowy nie ma podanej ilości w %, ale możemy to obliczyć:

$$30\% + 20\% + 37,5\% = 87,5\%$$

$$100\% - 87,5\% = 12,5\%$$

2. Wiemy już, że sok pomidorowy to 12,5% sprzedanych soków i że było to 15 kartonów. Ilość wszystkich kartonów możemy obliczyć z proporcji:

$$\begin{array}{lcl} 15 \text{ kartonów} & \text{—} & 12,5\% \\ x \text{ kartonów} & \text{—} & 100\% \end{array}$$

$$x = \frac{15 \cdot 100\%}{12,5\%} = 120 \text{ (kartonów)}$$

Możemy już ocenić pierwsze zdanie - to FAŁSZ (120, a nie 125 kartonów)

3. W drugim zdaniu mowa jest o soku jabłkowym i pomidorowym. To, ile sprzedano pomidorowego jest znane z treści zadania; 15 kartonów, zaś ilość jabłkowego obliczymy, gdyż z wykresu wiemy, że sok jabłkowy to 37,5% z wszystkich, czyli z wyliczonych 120 kartonów:

$$37,5\% \text{ z } 120 = 37,5\% \cdot 120 = \frac{37,5}{100} \cdot \frac{120}{1} = \frac{4500}{100} = 45$$

procent to
ułamek o
mianowniku
100

kartonów soku
jabłkowego

$$45 - 15 = 30$$

kartony
soku
jabłkowego

kartony
soku
pomidorowego

Możemy już ocenić drugie zdanie - to PRAWDA (sprzedano o 30 kartonów więcej)

Odp.:

Sprzedano łącznie 125 kartonów soków.	P	F
Sprzedano o 30 kartonów więcej soku jabłkowego niż pomidorowego.	P	F

Zadanie 2. (0–1)

W liczbie pięciocyfrowej 258#4, podzielnej przez 4 i niepodzielnej przez 3, cyfrę dziesiątek zastąpiono znakiem „#”.

Jakiej cyfry na pewno nie zastąpiono znakiem „#”? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 0

B. 4

C. 6

D. 8

Przypomnienie: - liczba dzieli się przez 4, jeśli liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr liczby dzieli się przez 4

Ⓟ 793536 dzieli się przez 4, bo ostatnie dwie cyfry tworzą 36, a 36 dzieli się przez 4

Ⓟ 793514 nie dzieli się przez 4, bo ostatnie dwie cyfry tworzą 14, a 14 nie dzieli się przez 4

Przypomnienie: - liczba dzieli się przez 3, jeśli dodamy jej cyfry i wynik będzie dzielił się przez 3

Ⓟ 5421 dzieli się przez 3, bo $5+4+2+1=12$, a 12 dzieli się przez 3

Najszybszą metodą będzie chyba podstawianie za # cyfr z odpowiedzi i sprawdzanie czy *nie pasują*:

25804 dzieli się przez 4 (bo na końcu jest 04)
nie dzieli się przez 3 (bo $2+5+8+0+4=19$, a 19 nie dzieli się przez 3)

Tak więc 0 nie jest odpowiedzią, bo zgodnie z pytaniem ma *nie pasować*

25844 dzieli się przez 4 (bo na końcu jest 44)
nie dzieli się przez 3 (bo $2+5+8+4+4=23$, a 23 nie dzieli się przez 3)

Tak więc 4 nie jest odpowiedzią, bo zgodnie z pytaniem ma *nie pasować*

25864 dzieli się przez 4 (bo na końcu jest 64)
nie dzieli się przez 3 (bo $2+5+8+6+4=25$, a 25 nie dzieli się przez 3)

Tak więc 6 nie jest odpowiedzią, bo zgodnie z pytaniem ma *nie pasować*

25884 dzieli się przez 4 (bo na końcu jest 84)
ale też dzieli się przez 3 (bo $2+5+8+8+4=27$, a 27 dzieli się przez 3)

Tak więc 8 jest odpowiedzią, bo zgodnie z pytaniem “nie podstawimy cyfry, przez którą cała liczba ma dzielić się przez 4, ale nie dzielić przez 3”.

Zadanie 3. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\frac{4}{3} \cdot 3 - 2^3$ jest równa

A. $-\frac{14}{3}$

B. -4

C. -7

D. $-\frac{8}{3}$

E. -2

$$\frac{4}{3} \cdot 3 - 2^3$$

Mamy mnożenie, odejmowanie i potęgowanie - zadanie ma *pułapkę*, w którą często *wpadają* uczniowie:

$$\frac{4}{3} \cdot 3 - 2^3$$

Gdzie jest ta pułapka? Wyrażenie -2^3 to nie to samo, co $(-2)^3$

$$\frac{4}{3} \cdot 3 - 2^3$$

Co to oznacza? Mamy tutaj potęgowanie liczby 2, a znak minus **czeka na wynik**, bo potęgowanie jest przed odejmowaniem w kolejności działań!

Obliczmy więc wartość:

$$\frac{4}{3} \cdot 3 - 2^3 = \frac{4}{3} \cdot \cancel{3} - 8 = 4 - 8 = -4$$

minus czeka na wynik potęgowania

Gdyby w wyrażeniu $\frac{4}{3} \cdot 3$ nie skracać trójek, to $\frac{4}{3} \cdot 3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{12}{3} = 4$

Odp.:

A. $-\frac{14}{3}$

B. -4

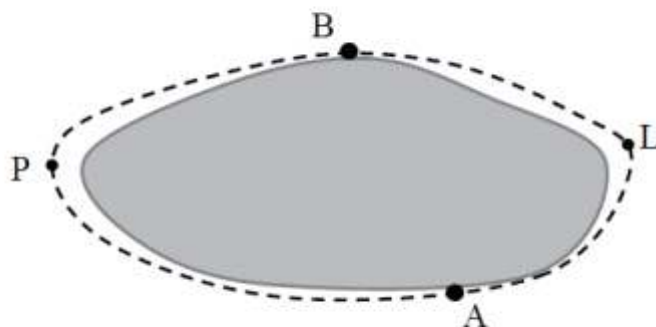
C. -7

D. $-\frac{8}{3}$

E. -2

Zadanie 4. (0–1)

Miejscowości A i B położone na przeciwległych brzegach jeziora są połączone dwiema drogami – drogą polną prowadzącą przez punkt P i drogą leśną prowadzącą przez punkt L. Długość drogi polnej APB wynosi 10 km, a długość drogi leśnej ALB jest równa 6 km.



Matylda i Karol wyruszyli na rowerach z miejscowości A do miejscowości B o godzinie 10:00. Matylda jechała drogą leśną, a Karol – drogą polną. Średnia prędkość jazdy Matyldy wynosiła $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość Karola była równa $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Do miejscowości B Karol przyjechał wcześniej niż Matylda.	P	F
Matylda przyjechała do miejscowości B o godzinie 10:24.	P	F

Oba pytania sugerują, że dla Karola i Matyldy musimy policzyć czas przejazdu ich dróg.

Obliczenia, nazwijmy je *fizyczne*

(z wykorzystaniem wzoru $v = \frac{s}{t}$)

Karol - droga polna

$$s=10 \text{ km}$$

$$v=20 \text{ km/h}$$

$$t=?$$

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{czyli} \quad t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{10 \text{ km}}{20 \text{ km/h}}$$

$$t=0,5 \text{ h}$$

Matylda - droga leśna

$$s=6 \text{ km}$$

$$v=15 \text{ km/h}$$

$$t=?$$

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{czyli} \quad t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{6 \text{ km}}{15 \text{ km/h}}$$

$$t=0,4 \text{ h}$$

Obliczenia, nazwijmy je *matematyczne*

(z wykorzystaniem proporcji)

Na niedawnych lekcjach (przed zarazą) w takich zadaniach prędkość, np. 20 km/h zapisywaliśmy w proporcji tak:

20 km — 60 min (czyli 20 km na 1 godz. czyli na 60 min)

Karol - droga polna

$$20 \text{ km} \text{ — } 60 \text{ min}$$

$$10 \text{ km} \text{ — } x \text{ min}$$

$$x = \frac{10 \cdot 60}{20} = 30 \text{ min}$$

Matylda - droga leśna

$$15 \text{ km} \text{ — } 60 \text{ min}$$

$$6 \text{ km} \text{ — } x \text{ min}$$

$$x = \frac{6 \cdot 60}{15} = 24 \text{ min}$$

Zaletą takiego sposobu rozwiązywania zadań z prędkością jest chociażby to, że otrzymujemy od razu wynik w minutach.

Możemy teraz ocenić oba zdania:

Do miejscowości B Karol przyjechał wcześniej niż Matylda.	P	F
Matylda przyjechała do miejscowości B o godzinie 10:24.	P	F

Fałsz - wyjechali razem o 10:00, a Karol jechał dłużej (30 min) od Matyldy (24 min), więc nie mógł przyjechać wcześniej.

Prawda - Matylda wyjechała o 10:00, jechała 24 minuty, więc na miejscu była o 10:24.

Zadanie 5. (0–1)

Na treningu odmierzano za pomocą aplikacji komputerowej 15-minutowe cykle ćwiczeń, które następowały bezpośrednio jeden po drugim. Ola zaczęła ćwiczyć, gdy pierwszy cykl trwał już 2 minuty, a skończyła, gdy do końca trzeciego cyklu zostało jeszcze 7 minut.

Ile łącznie minut Ola ćwiczyła na zajęciach? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

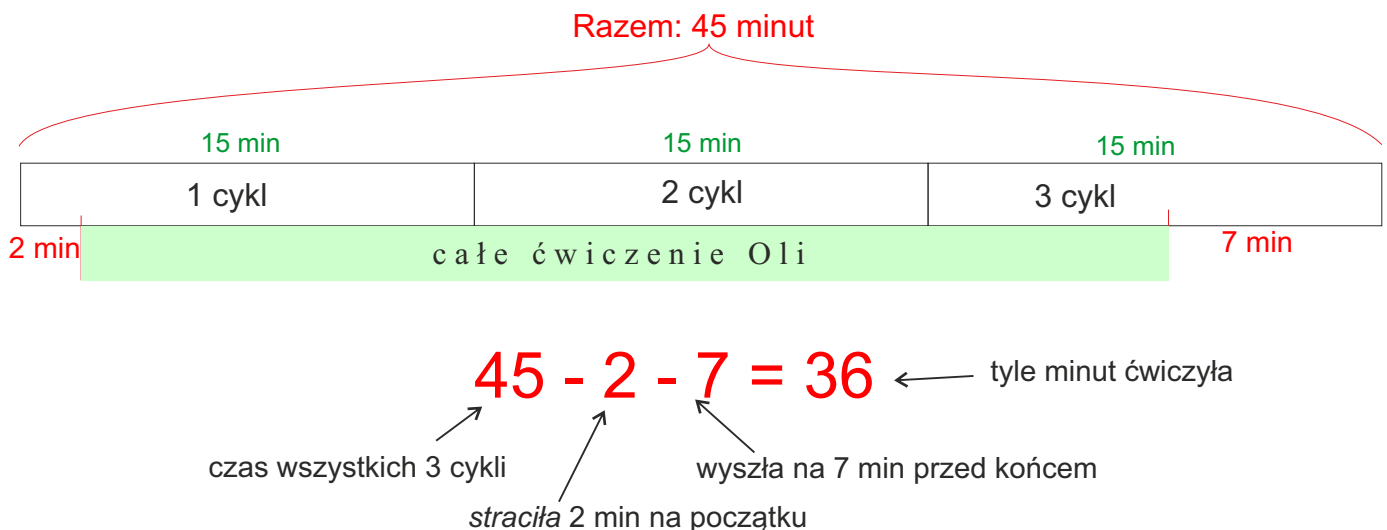
A. 36

B. 35

C. 24

D. 21

Chyba się zgodzicie, że było to bardzo łatwe zadanie. Podany niżej rysunek wyjaśnia chyba wszystko bez zbędnych słów.



Odp.:

A. 36

B. 35

C. 24

D. 21

Zadanie 6. (0–1)

Oskar jest o 6 lat starszy od swoich braci bliźniaków. Obecnie Oskar i jego dwaj bracia mają razem 42 lata.

Ile lat ma obecnie każdy z bliźniaków? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 18

B. 16

C. 14

D. 12

Oskar	brat(pierwszy)	brat (drugi)
$x+6$	x	x

Oznaczamy wiek któregoś z braci jako x . Drugi brat ma też x lat, bo to bliźniacy. Oskar jest od każdego z nich o 6 lat starszy, więc ma $x+6$ lat.

Razem mają 42 lata, więc dodajmy ich wiek:

$$x+6 + x +x = 42$$

$$x+x+x = 42 - 6$$

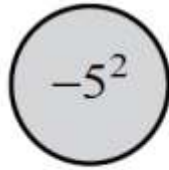
$$3x = 36 \text{ } /:3$$

$$x = 12$$

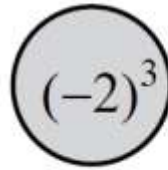
Odp. Każdy z bliźniaków ma obecnie 12 lat (odp. **D**)

Zadanie 7. (0–1)

Marta przygotowała dwa żetony takie, że suma liczb zapisanych na obu stronach każdego żetonu jest równa zero. Widok jednej ze stron tych żetonów przedstawiono poniżej.



Żeton 1.



Żeton 2.

Jakie liczby znajdują się na niewidocznych stronach tych żetonów? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. -25 i -8

B. -25 i 8

C. 25 i -8

D. 25 i 8

Na wstępie:

Napisano, że suma liczb zapisanych na obu stronach żetonu musi równać się zero.

Kiedy suma dwóch liczb równa się zero? - Kiedy są przeciwne, np.:

-3 i 3 (bo $-3 + 3 = 0$) albo np. 7 i (-7) bo $7 + (-7) = 7 - 7 = 0$

plus i minus obok siebie dają minus

Pamiętacie zadanie 3, a w nim wyrażenie ($\frac{4}{3} \cdot 3 - 2^3$) - mamy tutaj podobną sytuację.

Żeton 1

$$-5^2 = -25$$

Potęgowana jest liczba 5, a minus czeka na wynik
(potęgowanie przed odejmowaniem)

Liczbą przeciwną do -25 jest 25 i ta liczba musi być po drugiej stronie żetonu
(bo $-25 + 25 = 0$)

Żeton 2

$$(-2)^3 = -8$$

Potęgowana jest liczba (-2), czyli $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

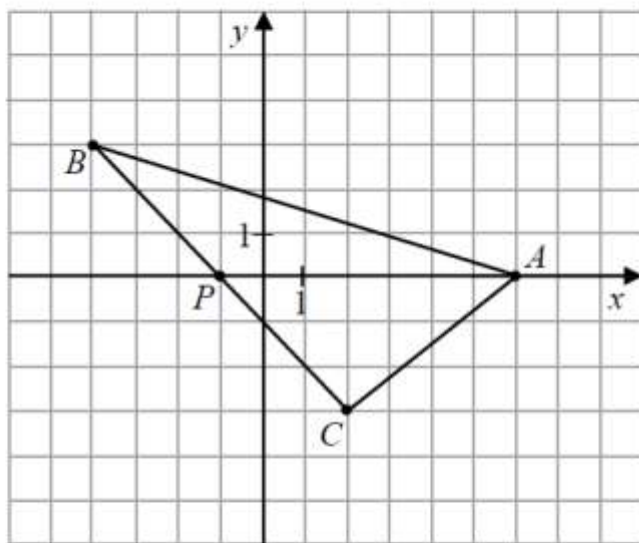
Nieparzysta ilość mnożonych
minusów daje wynik ujemny

Liczbą przeciwną do -8 jest 8 i ta liczba musi być po drugiej stronie żetonu
(bo $-8 + 8 = 0$)

Odp. Para liczb z drugich stron żetonów to 25 i 8 (odp. D)

Zadanie 8. (0–1)

W układzie współrzędnych zaznaczono trójkąt ABC oraz punkt P należący do boku BC . Wszystkie współrzędne punktów A , B , C i P są liczbami całkowitymi.

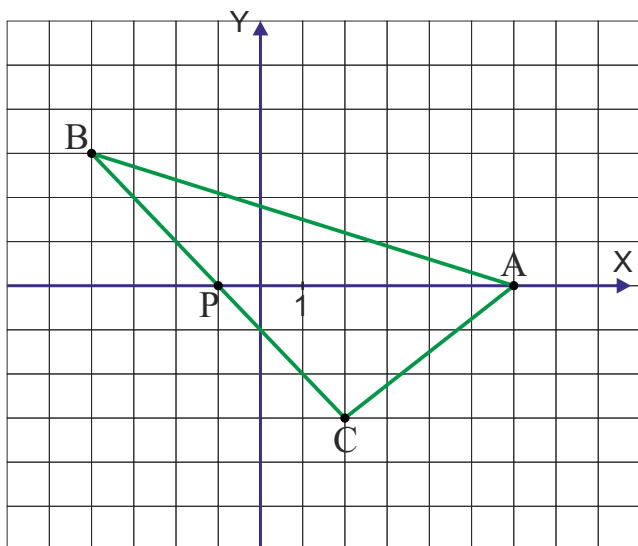


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

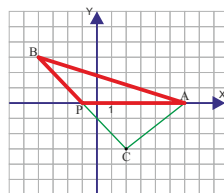
Pole trójkąta PAB jest równe polu trójkąta PAC .	P	F
Pole trójkąta ABC jest równe 21.	P	F

Na wstępie:

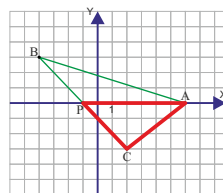
Jeżeli napisano, że współrzędne punktów A, B, C i P są całkowite (czyli *żadnych ułamków*), to oznacza, że P ma współrzędne $(-1, 0)$ (*widać to bezpośrednio z rysunku*).



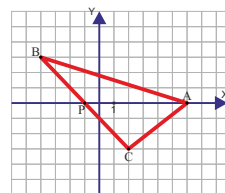
W zadaniu mówi się o tych trzech trójkątach:



trójkącie PAB



trójkącie PAC

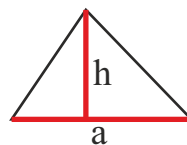


trójkącie ABC

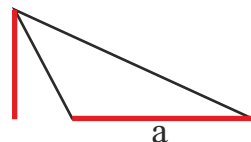
Oba pytania dotyczą pól powierzchni tych trójkątów, czyli *pewnie* trzeba będzie je policzyć!

Ogólny wzór na pole trójkąta to $P = \frac{a \cdot h}{2}$

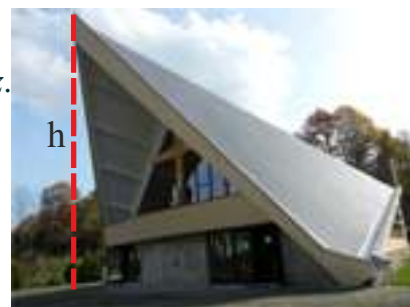
W przypadku *ładnych*, ostrokątnych trójkątów mamy:



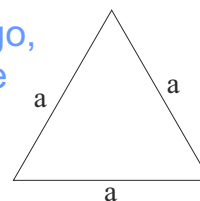
Kiedy trójkąt jest rozwartokątny, to wysokość jest *na zewnątrz*:



To tak, jak w kościele w Wołkowie - jego wysokość też jest *na zewnątrz*.



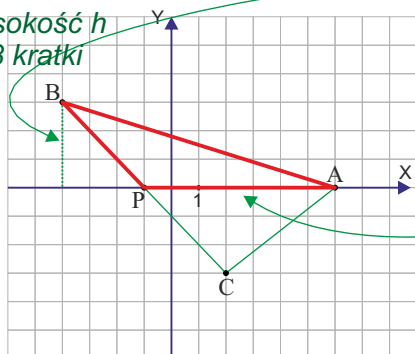
Znacie też specjalny wzór na pole trójkąta równobocznego, ale nie ma on zastosowania w tym zadaniu (po prostu nie ma w nim żadnego równobocznego).



$$P = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

Wróćmy do zadania - kiedy figura jest w układzie współrzędnych, to długości jej poziomych i pionowych odcinków liczymy *palcem po kratkach*:

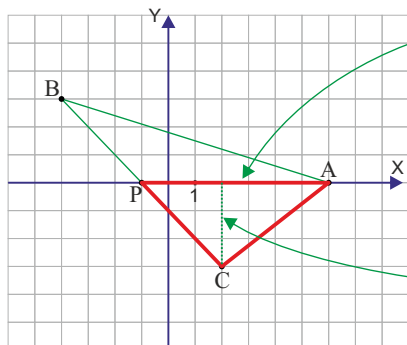
wysokość h
to 3 kratki



$$P_{\Delta PAB} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$$

podstawa a to 7 kratek

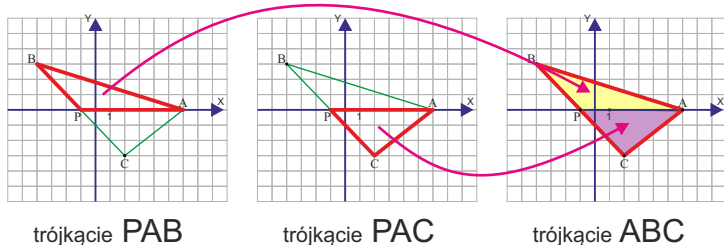
podstawa a to 7 kratek



$$P_{\Delta PAC} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$$

wysokość h to 3 kratki

Możemy już ocenić pierwsze zdanie - **PRAWDA** (pole trójkąta PAB = polu trójkąta PAC)



Nie musimy dodatkowo obliczać pola trójkąta ABC - składa się z dwóch trójkątów, których pola już znamy i wystarczy je dodać:

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta PAB} + P_{\Delta PAC}$$

$$P_{\Delta ABC} = 10,5 + 10,5 = 21$$

To znaczy, że drugie zdanie też jest prawdziwe.

Miało być każde zadanie na nowej stronie, ale *niech tam*.

Zadanie 9. (0-1)

Trójkąt, w którym długości boków są do siebie w stosunku 3 : 4 : 5 nazywa się trójkątem egipskim.

Z odcinków o jakich długościach nie można zbudować trójkąta egipskiego? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

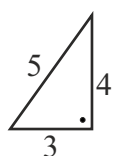
A. 6, 8, 10

B. 9, 12, 15

C. 12, 20, 25

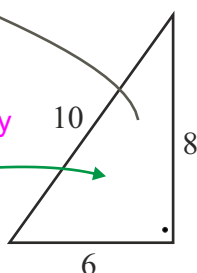
D. 21, 28, 35

To zadanie można rozwiązać na kilka sposobów, ale chyba najprostszym i pokazywanym na lekcji jest ten:

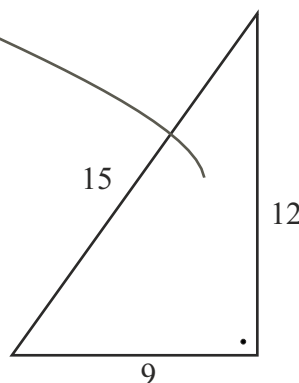


To podstawowy trójkąt egipski

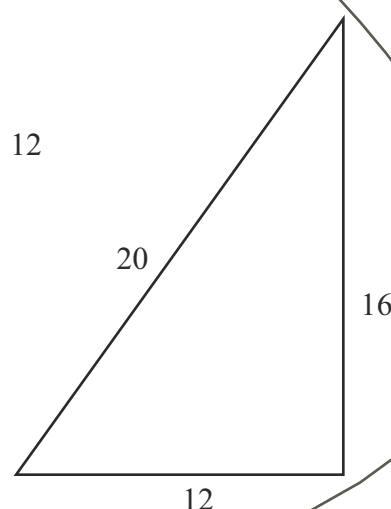
Powiększamy go 2 razy



Powiększamy go 3 razy



Powiększamy go 4 razy



Podstawowy trójkąt egipski
3, 4, 5

Dalsze powiększania:

razy 5 otrzymujemy boki 15, 20, 25

razy 6 otrzymujemy boki 18, 24, 30

razy 7 otrzymujemy boki 21, 28, 35

itd.

Przyglądając się odpowiedziom w zadaniu widać, że NIE DA ZBUDOWAĆ trójkąta egipskiego z boków o długościach 12, 20, 25 (odp. C)

Zadanie 10. (0–1)

Sprzedawca kupił od ogrodnika róże i tulipany za łączną kwotę 580 zł. Jeden tulipan kosztował 1,20 zł, a cena jednej róży była równa 4 zł. Sprzedawca kupił o 50 tulipanów więcej niż róż.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli liczbę zakupionych tulipanów oznaczmy przez t , to podane zależności opisuje równanie

- A. $1,2(t+50) + 4t = 580$
- B. $1,2(t-50) + 4t = 580$
- C. $1,2t + 4(t-50) = 580$
- D. $1,2t + 4(t+50) = 580$

Najlepszą metodą będzie tutaj samodzielne napisanie takiego wyrażenia i sprawdzenie, która odpowiedź zgadza się z naszą.

cena: 1,20 zł/za 1 tulipan



kupiono t tulipanów

cena: 4,00 zł/za 1 różę



kupiono $t-50$ róż

Zauważ, że napisano, iż kupiono o 50 tulipanów więcej niż róż, czyli inaczej - róż kupiono o 50 mniej niż tulipanów (dlatego jest $t-50$)

Wiedząc, że za zakupy zapłacono 580 zł, możemy napisać wyrażenie, które to opisuje:

$$1,20 \cdot \text{ilość tulipanów} + 4,00 \cdot \text{ilość róż} = 580$$

czyli

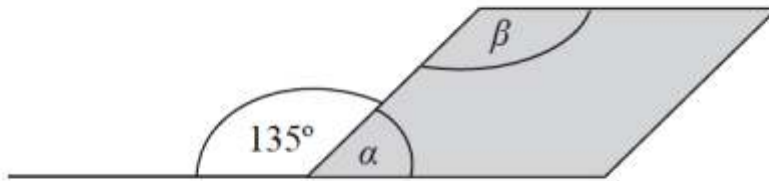
$$1,20 t + 4,00 (t-50) = 580$$

po opuszczeniu niepotrzebnych zer:

$$1,2 t + 4 (t-50) = 580 \quad \text{To jest odpowiedź C.}$$

Zadanie 11. (0–1)

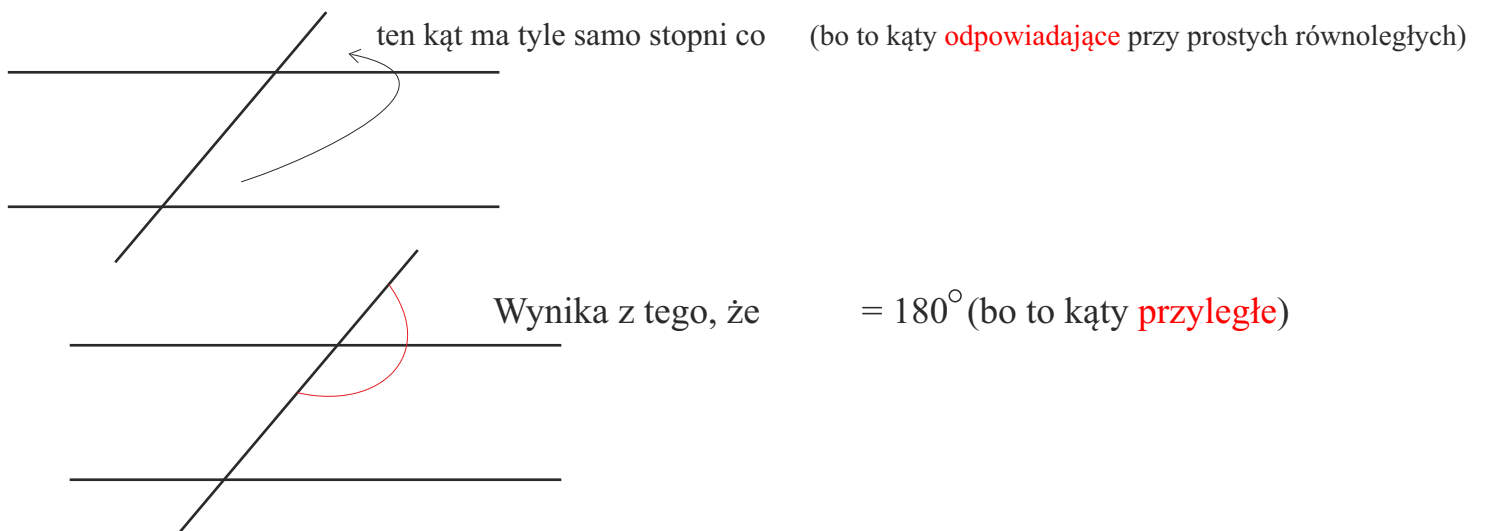
Figura zacięniowana na rysunku jest równoległobokiem.



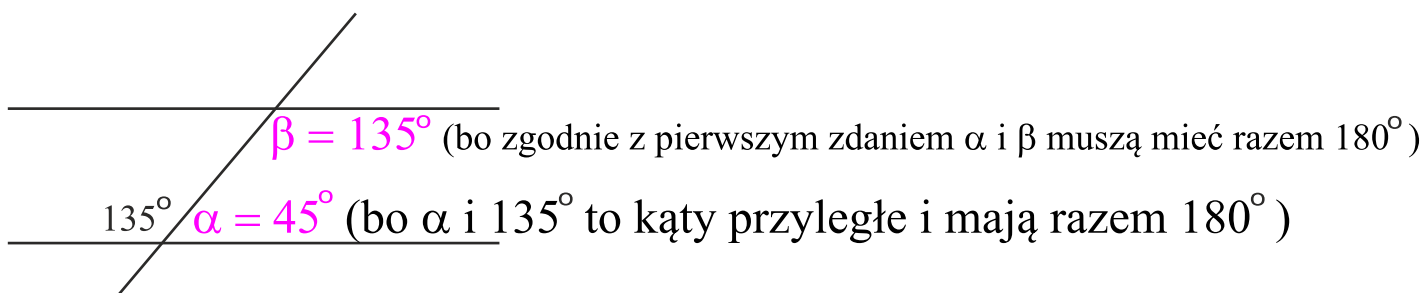
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Suma miar kątów α i β wynosi 180° .	P	F
Kąt α ma miarę 3 razy mniejszą niż kąt β .	P	F

Pierwsze zdanie jest PRAWDZIWE - wykorzystywaliśmy to twierdzenie w obliczeniach miar kątów. Przypomnę dlaczego jest prawdziwe:



Teraz drugie zdanie:



Czy α jest więc 3 razy mniejszy niż β ? Tak, bo $135 : 3 = 45$

Tak więc drugie zdanie też jest PRAWDZIWE.

Zadanie 12. (0–1)

Na rysunku przedstawiono trójkąt równoramienny KLM o ramionach KM i LM . Miara kąta KML jest dwa razy większa niż miara kąta KLM .

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Miara kąta KLM jest równa

A	B
---	---

.

A. 40°

B. 45°

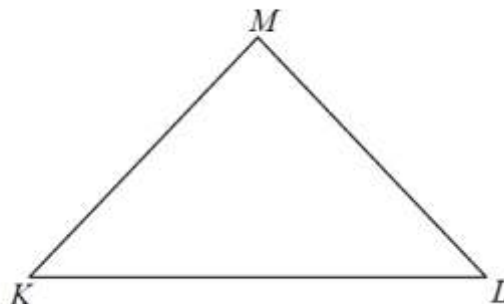
Trójkąt KLM jest

C	D
---	---

.

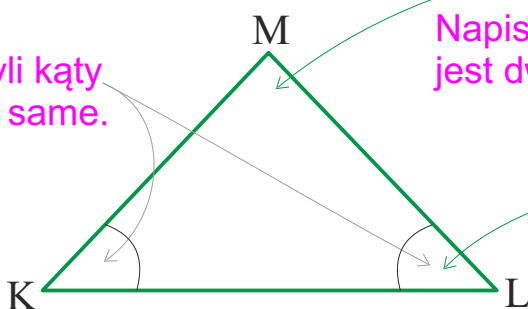
C. rozwartokątny

D. prostokątny



Napisali, że trójkąt KLM jest równoramienny, czyli kąty przy podstawie są takie same.

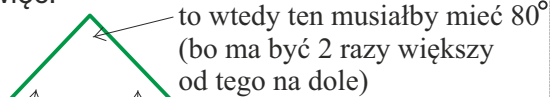
Napisano również, że kąt KML jest dwa razy większy od KLM



Ile stopni mają więc kąty w takim trójkącie?

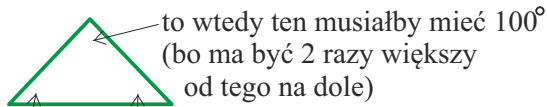
Metoda na szukanego

Wiem, że tę metodę lubi kilku uczniów w klasie 8 - szukanie aż znajdzie się właściwe liczby. Szukajmy więc:



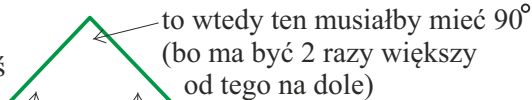
jeśli ten np. 40° to i ten 40°

Po dodaniu wszystkich: $40+40+80=160$ (za mało (w trójkącie musi być 180°))



jeśli ten np. 50° to i ten 50°

Po dodaniu wszystkich: $50+50+100=200$ (za dużo)

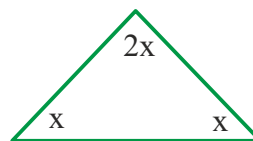


to może coś pośrodku:

jeśli ten np. 45° to i ten 45°

Po dodaniu wszystkich: $45+45+90=180$ (w sam raz)

Metoda elegancka



$$x+x+2x = 180$$

$$4x = 180 \quad / :4$$

$$x = 45$$

$$\text{czyli } 2x = 90$$

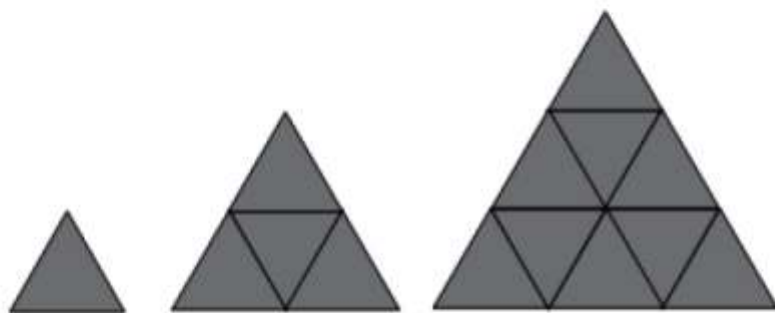
Mamy już obie odpowiedzi:

- kąt KLM ma 45° (odpowiedź B)

- to jest trójkąt prostokątny (odp. D)
(bo jeden z kątów ma 90°)

Zadanie 13. (0–1)

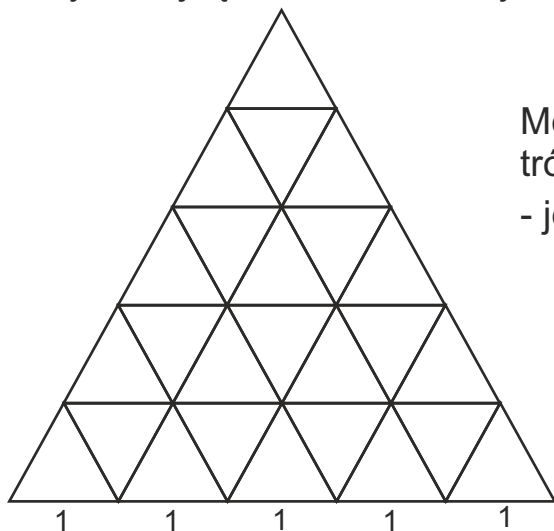
Małe trójkąty równoboczne o bokach długości 1 układano obok siebie tak, że uzyskiwano kolejne, coraz większe trójkąty równoboczne, według reguły przedstawionej na poniższym rysunku.



Ile małych trójkątów równobocznych należy użyć, aby ułożyć trójkąt równoboczny o podstawie równej 5? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 9 B. 16 C. 25 D. 50

Napewno znajdą się osoby, które po prostu narysują sobie taką figurę, która w podstawie ma 5 małych trójkątów równobocznych (w końcu 5 to nie tak dużo).

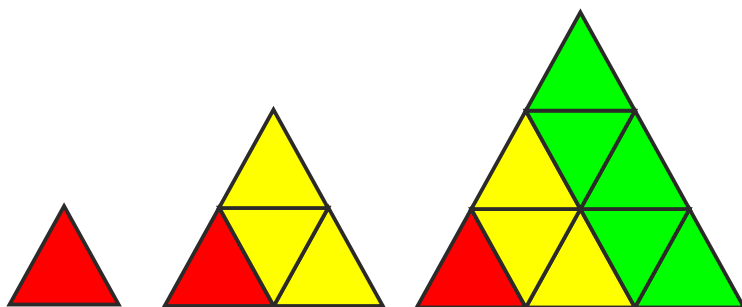


Można (nawet palcem) policzyć ilość małych trójkątów z których zbudowana jest ta figura -
- jest ich **25**.

Oczywiście należy zdawać sobie sprawę z faktu, że w przypadku znacznie większych figur ta metoda byłaby potwornie czasochłonna!

W zadaniach, w których tworzy się liczby według pewnej reguły, należy odkryć tę regułę!
Wróćmy do rysunków podanych w zadaniu:

Kolory pokazują ile trójkątów przybywa kiedy powstaje nowy "duży" trójkąt:



Tutaj jest
1 trójkąt

Przybyło **3**
nowe trójkąty
(to te żółte)

Przybyło **5** nowych
trójkątów (to te zielone)

Przybyłoby **7**
nowych
trójkątów
 $9+7=16$

Przybyłoby **9**
nowych
trójkątów
 $16+9=25$

Przybyłoby **11**
nowych
trójkątów
 $25+11=36$

itd.

To oznacza, że:

rozw. zad. - odp. C

Zbierzmy te wyniki w jakąś sensowną tabelkę:

Który z kolei DUŻY trójkąt	Ilość MAŁYCH trójkątów z których składa się ten DUŻY
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

Nie mówcie mi, że nie widzicie,
co to za liczby?
Toż **to potęgi** kolejnych liczb N!

PO odkryciu, że są to potęgi można odpowiedzieć na pytanie np. **Z ilu małych trójkątów będzie się składał duży trójkąt, jeśli na dole w podstawie będzie np.:**

10 małych trójkątów? Odp.: $10^2 = 100$ małych trójkątów

20 małych trójkątów? Odp.: $20^2 = 400$ małych trójkątów

czyli ogólnie:

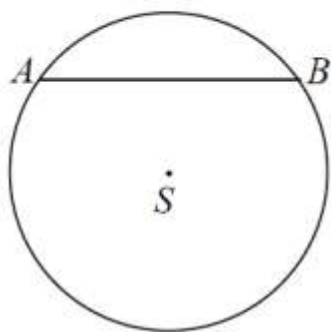
n małych trójkątów? Odp.: **n^2** małych trójkątów

Dla $n=5$ (w zadaniu jest w podstawie 5 małych trójkątów) będzie więc $5^2 = 25$

Ostatecznie: odpowiedź **C** (25 trójkątów)

Zadanie 14. (0–1)

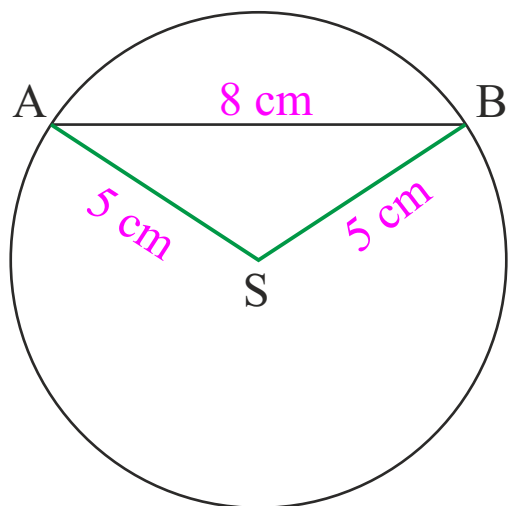
W okręgu o środku S i promieniu 5 cm narysowano cięciwę AB o długości 8 cm.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Odległość punktu S od cięciwy AB jest równa 3 cm.	P	F
Obwód trójkąta ASB jest równy 16 cm.	P	F

Do rozwiązania zadania potrzebujemy dorysować promienie do końców cięciwy AB i dopisać długości znanych odcinków (żeby wszystko lepiej ogarnąć)



Można od razu ocenić **drugie zdanie**:

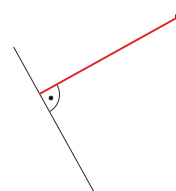
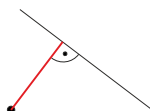
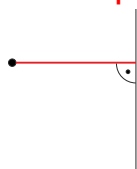
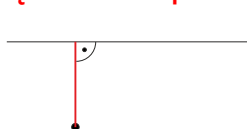
$$\text{Obwód trójkąta } ASB = 8 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = \mathbf{18 \text{ cm}}$$

Tak więc **FAŁSZ**

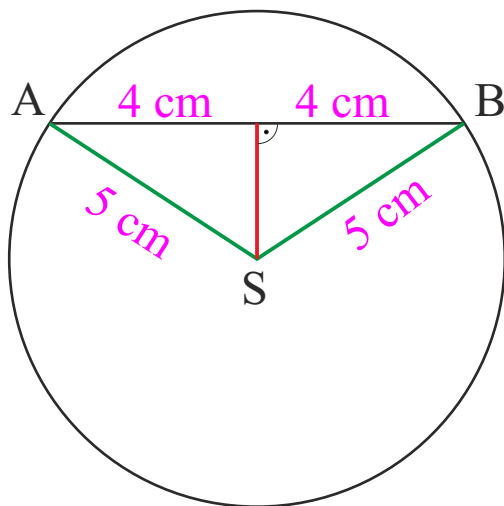
Natomiast pierwsze zdanie dotyczy odległości punktu od odcinka (prostej).
Wiem, że uczniowie podchodzą do tego intuicyjnie wskazując dobrze potrzebny odcinek, nawet jeśli nie znają lub nie pamiętają definicji, która brzmi tak:

Odległość punktu od prostej to najkrótszy odcinek łączący ten punkt z tą prostą.

(P) Czerwone odcinki pokazują odległości punktów od prostych lub odcinków.
(są zawsze prostopadłe do prostej lub odcinka)

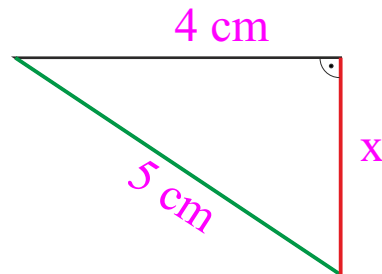


W naszym zadaniu odległość punktu S od cięciwy AB to czerwony odcinek.



Jaką długość ma ten czerwony odcinek?

Z twierdzenia Pitagorasa:



$$x^2 + 4^2 = 5^2$$

$$x^2 + 16 = 25$$

$$x^2 = 25 - 16$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9}$$

$$x = 3$$

Pierwsze zdanie jest PRAWDZIWE.

A tak przy okazji - być może był ktoś, kto zauważył, że jeśli trójkąt prostokątny ma boki 4, ?, 5 to jest to trójkąt egipski (był w zadaniu 9) i drugim krótszym bokiem będzie 3.

Zadanie 15. (0–1)

Średnia arytmetyczna dwóch ocen Janka z matematyki jest równa 3,5.

Jaką trzecią ocenę musi uzyskać Janek, by średnia jego ocen była równa 4? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

To zadanie można rozwiązać doświadczalnie, metodą prób i błędów, która zresztą pozwoli lepiej poczuć treść zadania.

P Żeby średnia dwóch ocen była równa 3,5 to muszą to być oceny, których suma wynosi 7 (bo $7:2=3,5$)

Mogą to być więc: 1 i 6 (lub 6 i 1) bo $\frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$

2 i 5 (lub 5 i 2) bo $\frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$

3 i 4 (lub 4 i 3) bo $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$

Weźmy pierwszą parę (oceny 1 i 6) i sprawdźmy jak będzie zmieniać się średnia, kiedy Janek dostałby ndst lub dps lub dst, ...

- gdyby dostał ndst (czyli 1) $\frac{1+6+1}{3} = \frac{8}{3} = 2,666...$ za mało - szukamy trzeciej oceny, która da średnią 4

Zauważ, że teraz średnia jest z trzech ocen, więc dzielimy przez 3

- gdyby dostał dps (czyli 2) $\frac{1+6+2}{3} = \frac{9}{3} = 3$ nadal za mało - szukamy trzeciej oceny, która da średnią 4

- gdyby dostał dst (czyli 3) $\frac{1+6+3}{3} = \frac{10}{3} = 3,33..$ nadal za mało do średniej 4

- gdyby dostał db (czyli 4) $\frac{1+6+4}{3} = \frac{11}{3} = 3,66..$ nadal za mało do średniej 4

- gdyby dostał bdb (czyli 5) $\frac{1+6+5}{3} = \frac{12}{3} = 4$ pasuje, czyli dla pary ocen 1 i 6 otrzymanie 5 daje średnią 4,0

Żeby nasze eksperymentalne sprawdzanie miało sens, powinniśmy powtórzyć obliczanie średniej dla następnej par, czyli ocen 2 i 5 oraz 3 i 4 ale -

- ale w tym miejscu powinniście zauważyć, że to bezcelowe, gdyż pierwsze dwie oceny zawsze dadzą 7, więc w każdym sprawdzeniu okazałoby się, że dopiero dodanie 5 daje średnią ocen 4,0.

Mamy więc rozwiązanie: **Janek musi otrzymać 5** aby jego średnia wyniosła 4 (**odp. C**).

Pokażmy jeszcze rozwiązanie eleganckie:

suma dwóch pierwszych ocen,
która zawsze wynosi 7

nieznana trzecia ocena

$$\frac{7 + x}{3} = 4$$

średnia, którą mamy otrzymać

3, bo obliczymy średnią z trzech ocen

$$\frac{7 + x}{3} = \frac{4}{1}$$

$$(7 + x) \cdot 1 = 3 \cdot 4$$

$$7 + x = 12$$

$$x = 12 - 7$$

$$x = 5$$

Zadanie 16. (0–2)

W tabeli podano cenniki dwóch korporacji taksówkowych. Należność za przejazd składa się z jednorazowej opłaty początkowej i doliczonej do niej opłaty zależnej od długości przejechanej trasy.

	Taxi „Jedynka”	Taxi „Dwójka”
Opłata początkowa	3,20 zł	8,00 zł
Cena za 1 km trasy	3,20 zł	2,40 zł

Pan Jan korzystał z Taxi „Jedynka”, a pan Wojciech – z Taxi „Dwójka”. Obaj panowie pokonali trasę o tej samej długości i zapłacili tyle samo. Ile kilometrów miała trasa, którą przejechał każdy z nich? Zapisz obliczenia.

Tutaj również zapewne znaleźliby się uczniowie, którzy to zadanie rozwiązywali by metodą na szukanego, np.:

jeśli trasa miała by powiedzmy 10 km, to:

Pan Jan w Taxi Jedynka zapłaciłby:

$$3,20 + 10 \cdot 3,20 = 3,20 + 32 = 35,20 \text{ zł}$$

Pan Wojciech w Taxi Dwójka zapłaciłby:

$$8 + 10 \cdot 2,40 = 8 + 24 = 32 \text{ zł}$$

Wyszły różne kwoty, a w zadaniu napisano, że zapłacili po tyle samo, więc 10 km nie jest rozwiązaniem.

Można by tak sprawdzać dalej i zapewne kilku uczniów doszłoby do dobrego wyniku (pamiętajcie aby na prawdziwym egzaminie PISAĆ wszystko!)

Pokażmy jednak jedyne sensowne i szybkie rozwiązanie, budując proste równanie:

x- szukana trasa (dla obu panów jest taka sama)

dla Taxi Jedynka	dla Taxi Dwójka
opłaty początkowe	
$3,20 + 3,20x = 8 + 2,40x$	
ilość km (nieznany x) razy stawka za 1 km	

Znak = oznacza, że szukamy takiej trasy (x), dla której obaj panowie zapłacą po tyle samo.

$$3,20x - 2,40x = 8 - 3,20$$

$$0,8x = 4,8 \quad / : 0,8$$

$$x = 6$$

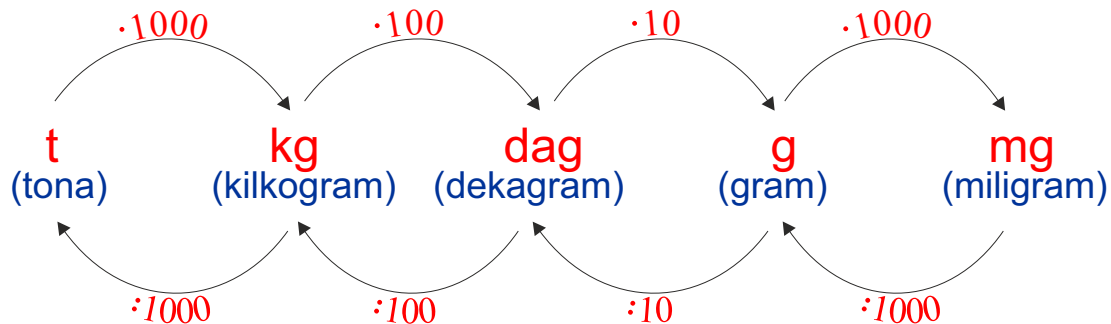
Odp.: Każdy z panów przejechał trasę 6 km.

Zadanie 17. (0–2)

Zmieszano 40 dag rodzynek w cenie 12 zł za kilogram oraz 60 dag pestek dyni w cenie 17 zł za kilogram. Ile kosztuje 1 kilogram tej mieszanki? Zapisz obliczenia.

Ważnym elementem rozwiązania tego zadania jest wiedza, że **1 kg = 100 dag**

Może warto w tym miejscu przypomnieć *ściągawkę* dotyczącą jednostek masy:



W naszym zadaniu mamy: 40 dag rodzynek czyli 0,4 kg i 60 dag dyni czyli 0,6 kg, chociaż zadanie możemy rozwiązywać w dag pamiętając, że 1 kg to 100 dag.

Wróćmy do zadania: obliczmy ile kosztuje 40 dag rodzynek i 60 dag dyni (może proporcją?)

rodzynki

$$\begin{aligned} 100 \text{ dag (czyli kg)} &= 12 \text{ zł} \\ 40 \text{ dag} &= x \text{ zł} \end{aligned}$$

$$x = \frac{40 \cdot 12}{100} = 4,80 \text{ zł}$$

dynia

$$\begin{aligned} 100 \text{ dag} &= 17 \text{ zł} \\ 60 \text{ dag} &= x \text{ zł} \end{aligned}$$

$$x = \frac{60 \cdot 17}{100} = 10,20 \text{ zł}$$

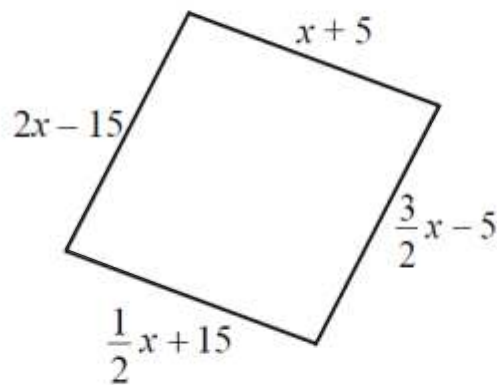
Dodajemy otrzymane wyniki (przecież mamy mieszankę): **4,80 + 10,20 = 15,00 zł**

Otrzymany wynik jest odpowiedzią, gdyż 40 dag + 60 dag = 100 dag, czyli 1 kg, a w zadaniu pytano o cenę właśnie za 1 kg tej mieszanki.

Odp. 1 kg tej mieszanki kosztuje 15 zł.

Zadanie 18. (0–2)

Długości boków czworokąta opisano za pomocą wyrażeń algebraicznych, tak jak pokazano na rysunku.



Uzasadnij, że jeśli obwód tego czworokąta jest równy 100 cm, to jest on rąmbem. Zapisz obliczenia.

Obwód wynosi 100 - dodajmy więc wszystkie boki:

$$(x+5) + (2x-15) + (\frac{1}{2}x+15) + (\frac{3}{2}x-5) = 100$$

Nawiasy pełniły rolę *kosmetyczną* - opuśćmy je i rozwiążmy to równanie:

$$x+5 + 2x-15 + \frac{1}{2}x+15 + \frac{3}{2}x-5 = 100$$

$$x + 2x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x = 100-5+15-15+5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$5x = 100$$

$$x = 20$$

Podstawmy 20 za x w każdym z czterech wyrażeń opisujących długość boków:

The diagram shows a quadrilateral with its sides labeled with calculations using $x=20$. The top side is labeled $x+5=20+5=25$, the right side is labeled $\frac{3}{2}x-5=\frac{3}{2}\cdot 20-5=30-5=25$, the bottom side is labeled $\frac{1}{2}x+15=\frac{1}{2}\cdot 20+15=10+15=25$, and the left side is labeled $2x-15=2\cdot 20-15=40-15=25$.

Odp. Każdy z boków tego czworokąta ma długość 25 cm, więc jest to rąmb.

Zadanie 19. (0–3)

Pan Kazimierz przejechał trasę o długości 90 km w czasie 1,5 godziny. W drodze powrotnej tę samą trasę pokonał w czasie o 15 minut krótszym. O ile kilometrów na godzinę była większa jego średnia prędkość jazdy w drodze powrotnej? Zapisz obliczenia.

Musimy obliczyć prędkość w jedną stronę, później prędkość drogi powrotnej, i odjąć obliczając o ile km/h ta druga była większa.

Podobne zadania rozwiązywaliście na fizyce i zawsze w pewnym momencie wielu uczniów staje przed pewnym matematycznym problemem - jakim? - o tym już za chwilę.

W zadaniu 4 pokazałem dwa sposoby obliczania prędkości, więc może teraz sposób fizyczny z wykorzystaniem wzoru $v = \frac{s}{t}$

droga w jedną stronę

$$\begin{array}{l} s=90 \text{ km} \\ t=1,5 \text{ h} \\ \text{-----} \\ v=? \\ \text{-----} \end{array}$$

$v = \frac{s}{t}$

$$v = \frac{90 \text{ km}}{1,5 \text{ h}}$$
$$v = 60 \text{ km/h}$$

droga powrotna

$$\begin{array}{l} s=90 \text{ km} \\ t=\text{no właśnie! Przyjechał 15 min wcześniej} \\ \text{czyli } 1,5 \text{ h} - 15 \text{ min} = 1 \text{ godz } 15 \text{ minut} \end{array}$$

Dla wielu uczniów jest to ciągle poważny problem, jak taki czas np. 3 godz 27 min przedstawić w postaci liczby z przecinkiem (zapewne **NIE** 3,27 - godz. nie ma 100 min)

Akurat w tym zadaniu jest 15 min, czyli $\frac{1}{4}$ godziny czyli 0,25 h ale co, kiedy będzie 17 min, 29 min albo coś takiego?

Najlepiej wam *idą* proporcje, więc trzymajcie się tego - 15 minut - jaka to część godziny?

$$\begin{array}{l} 60 \text{ min} = 1 \text{ h} \\ 15 \text{ min} = x \\ x = \frac{15 \cdot 1}{60} = \frac{15}{60} = 0,25 \text{ h} \end{array}$$

Możemy więc obliczyć v w drodze powrotnej:

$$\begin{array}{l} s=90 \text{ km} \\ t=1,25 \text{ h} \rightarrow 1 \text{ godz } 15 \text{ min} = 1 + 0,25 \text{ h} \\ \text{-----} \\ v=? \\ \text{-----} \end{array}$$

$v = \frac{s}{t}$

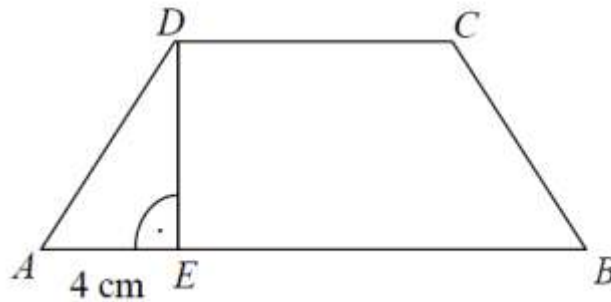
$$v = \frac{90 \text{ km}}{1,25 \text{ h}}$$
$$v = 72 \text{ km/h}$$

$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odp. W drodze powrotnej jego średnia prędkość była większa o 12 km/h.

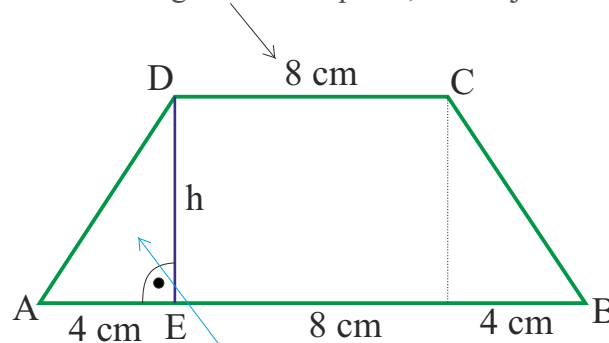
Zadanie 20. (0–3)

Trapez równoramienny $ABCD$, którego pole jest równe 72 cm^2 , podzielono na trójkąt AED i trapez $EBCD$. Odcinek AE ma długość równą 4 cm , a odcinek CD jest od niego 2 razy dłuższy. Oblicz pole trójkąta AED . Zapisz obliczenia.



Powtórzę radę z zadania 14 - przenieś dane na rysunek - *od razu lepiej!*

Dlaczego 8? - bo napisali, że CD jest dwa razy dłuższy od AE (który ma 4 cm)

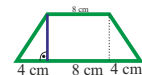


Dlaczego 4? - bo to trapez równoramienny

Polecenie brzmi: oblicz pole trójkąta AED - od razu widać, że nie znamy wysokości h , ale jest to też wysokość trapezu. *Rzut oka do zadania - podano tam pole (72 cm^2) - wykorzystajmy tę informację:* (Pamiętajcie! Wykorzystujcie wszystkie informacje z zadań!)

Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{(a+b)h}{2}$$



Dlaczego 16? ($4+8+4=16$)

Podstawiamy co się da:

$$72 = \frac{(16+8)h}{2}$$

$$72 = \frac{24h}{2}$$

$$72 = 12h$$

$$12h = 72 \quad / :12$$

$$h = 6$$

Zamieniamy obie strony
(pamiętajcie - ten zabieg
kosmetyczny znacznie
ułatwia obliczenia)

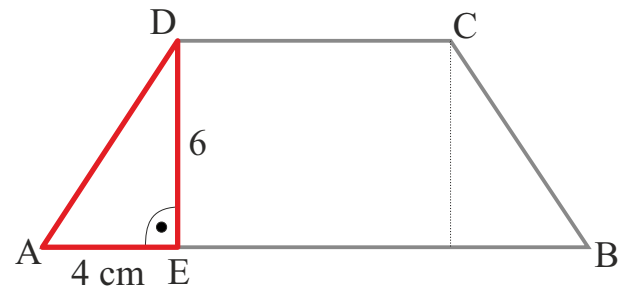
Możemy ostatecznie obliczyć pole trójkąta AED:

$$P = \frac{ah}{2}$$

$$P = \frac{4 \cdot 6}{2}$$

$$P = \frac{24}{2}$$

$$P = 12$$

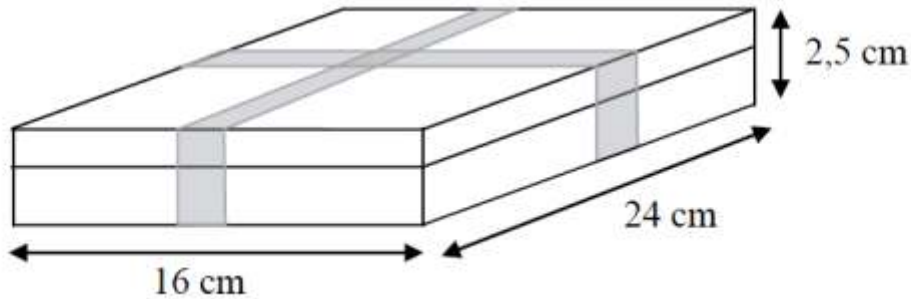


Odp. Pole trójkąta AED wynosi 12 cm^2 .

Jeszcze tylko ostatnie zadanie!

Zadanie 21. (0–3)

Pudełko w kształcie prostopadłościanu o wymiarach przedstawionych na rysunku zawiera 32 czekoladki. Każda czekoladka ma kształt prostopadłościanu o wymiarach 2 cm, 2 cm i 1,5 cm. Ile procent objętości pudełka stanowi objętość wszystkich czekoladek? Zapisz obliczenia.



Plan działania:

- obliczymy objętość całego pudełka,
- obliczymy objętość jednej czekoladki,
- objętość jednej czekoladki pomnożymy razy 32 (bo tyle ich jest)
- ułożymy proporcję na "jaki to %"

Obliczamy V całego pudełka: Obliczamy V jednej czekoladki: Obliczamy V wszystkich czekoladek

$$V = abH$$

$$V = 16 \cdot 24 \cdot 2,5$$

$$V = 960 \text{ cm}^3$$

$$V = abH$$

$$V = 2 \cdot 2 \cdot 1,5$$

$$V = 6 \text{ cm}^3$$

$$32 \cdot 6 \text{ cm}^3 = 192 \text{ cm}^3$$

Układamy proporcję: $\frac{\text{całe pudełko}}{\text{czekoladki}} = \frac{100\%}{x\%}$

960 cm³ = 100%

$$192 \text{ cm}^3 = x \%$$

$$x = \frac{192 \cdot 100}{960}$$

$x = 20\%$

Odp. Objętość wszystkich czekoladek stanowi 20% objętości całego pudełka.