

Ostrosłupy

W poznawaniu ostrosłupów przydadzą się interaktywne bryły, które można obracać, przybliżać i przesuwać:

modele 3D

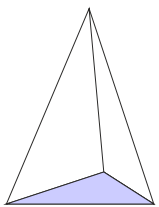
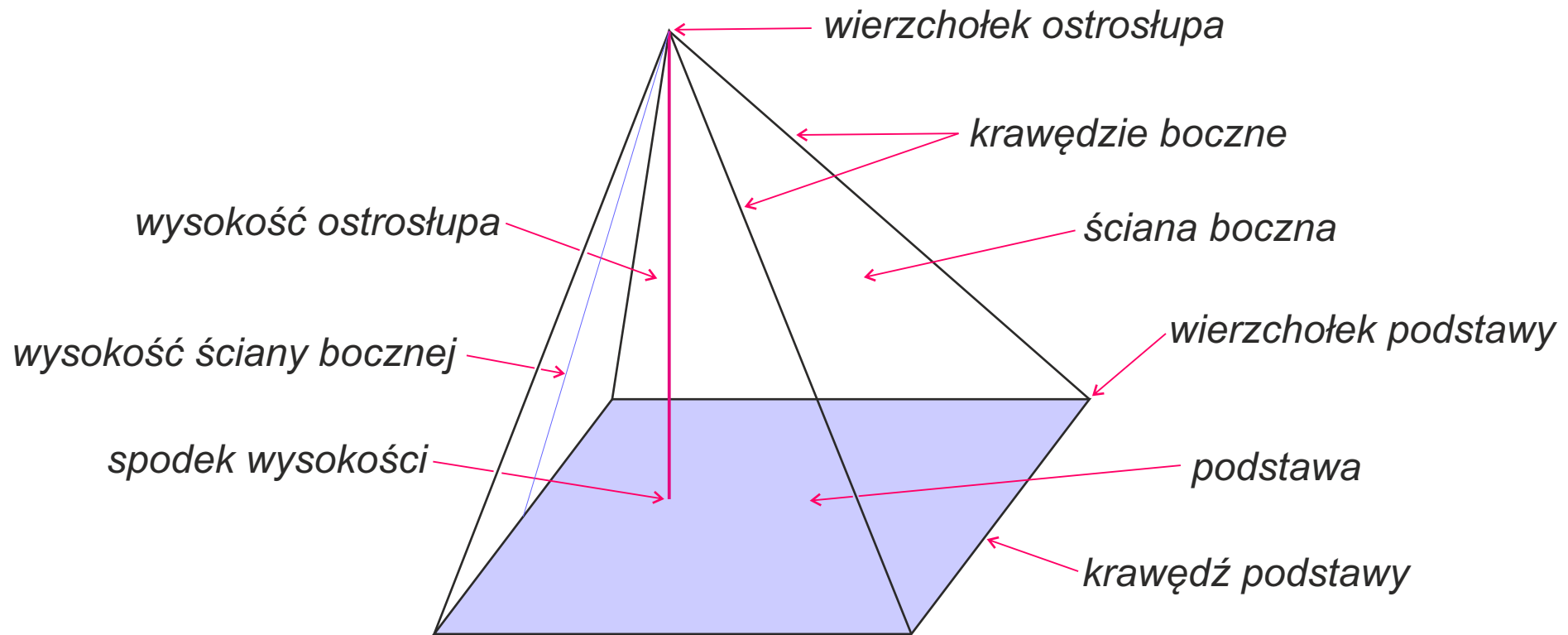


siatki 3D

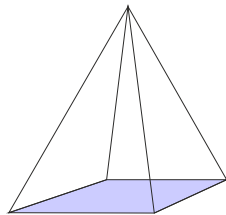


Definicja ostrosłupa

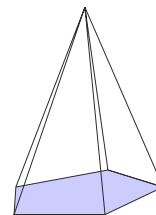
Ostrosłup to taki wielościan, który ma jedną podstawę będącą wielokątem, a wszystkie ściany boczne, które są trójkątami, zbiegają się w jednym punkcie zwanym wierzchołkiem.



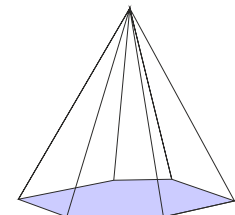
ostrosłup trójkątny



ostrosłup czworokątny

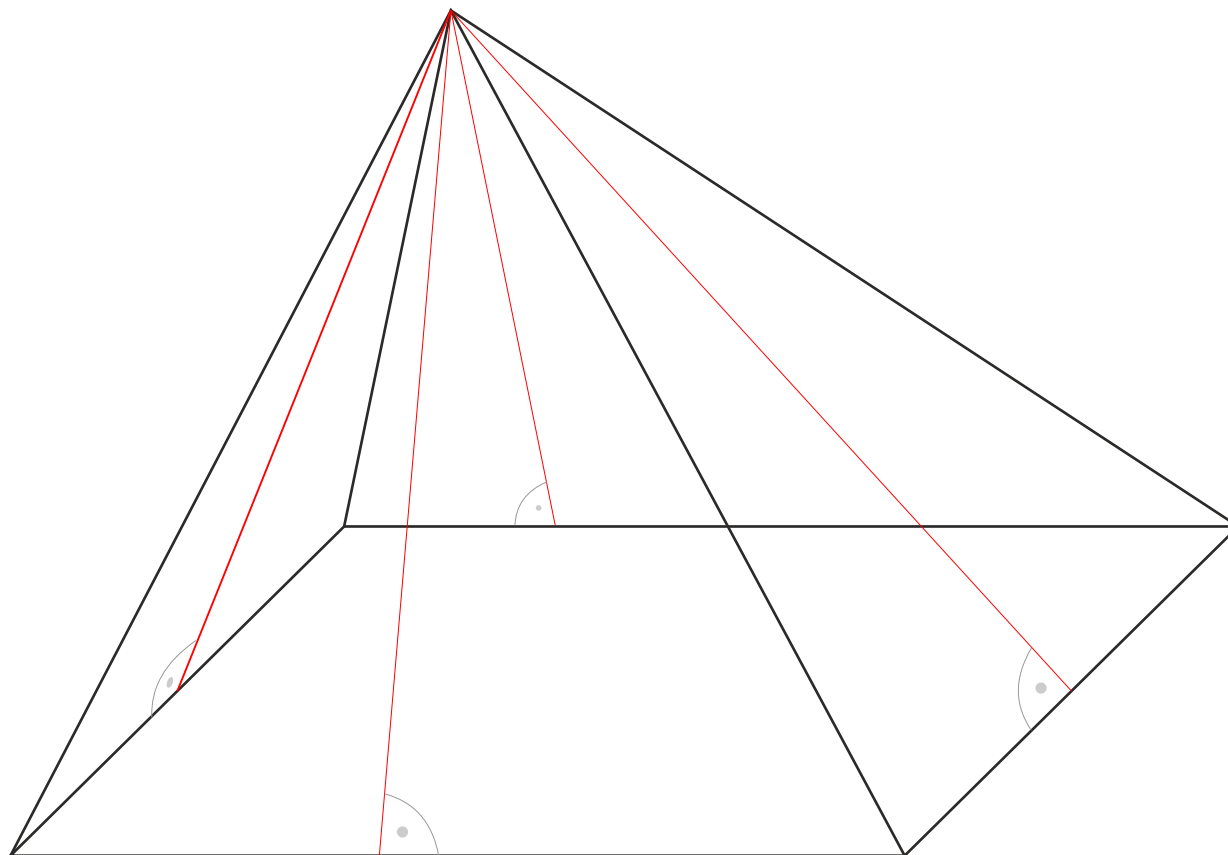


ostrosłup pięciokątny

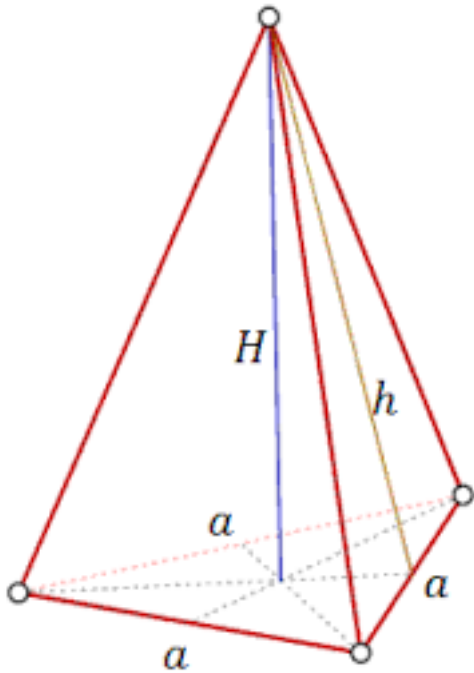


ostrosłup sześciokątny

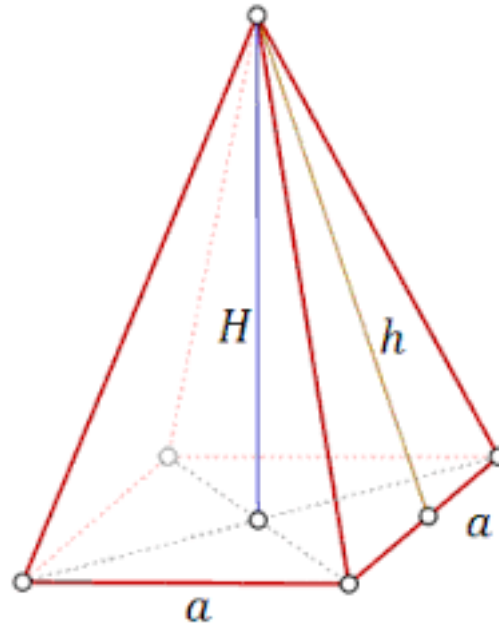
Wysokości ścian bocznych



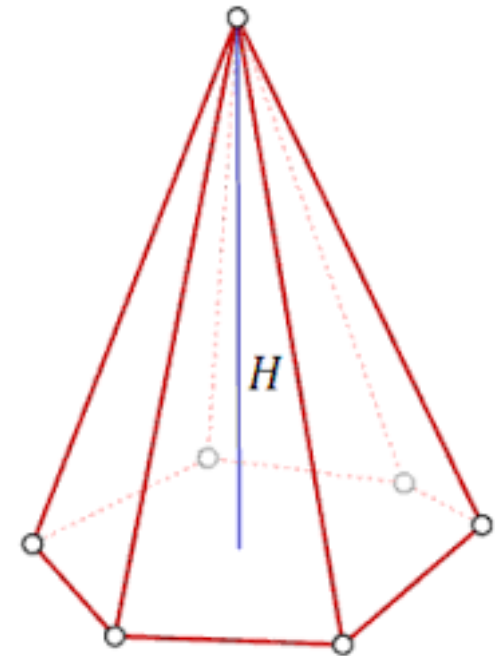
Ostrosłup **PRAWIDŁOWY** to taki, który ma w podstawie wielokąt foremny.



ostrosłup prawidłowy
TRÓJKĄTNY
(w podstawie trójkąt równoboczny)



ostrosłup prawidłowy
CZWOROKĄTNY
(w podstawie kwadrat)

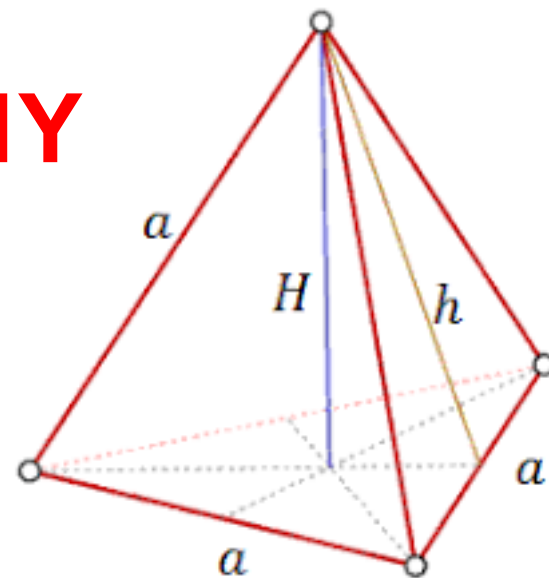


ostrosłup prawidłowy
SZEŚCIOKĄTNY
(w podstawie sześciokąt foremny)

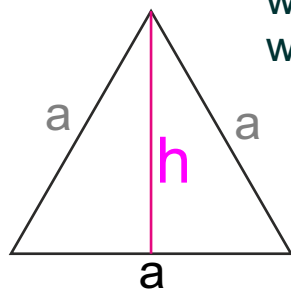
Jeden z ostrosłupów dostał swoją specjalną nazwę:

CZWOROŚCIAN FOREMNY

(wszystkie 4 ściany to takie same trójkąty równoboczne)



A tak przy okazji:

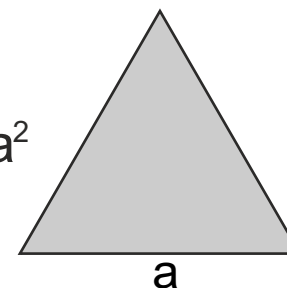


wzór na wysokość
w trójkącie równobocznym:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

wzór na pole powierzchni
trójkąta równobocznego:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



Pole powierzchni ostrosłupa:

$$P_c = P_p + P_b$$

P_c - pole powierzchni całkowitej (podstawa+wszystkie ściany boczne)

P_p - pole podstawy

P_b - suma wszystkich ścian bocznych

ciąg dalszy



Oblicz sumę wszystkich krawędzi tego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

ROZWIĄZANIE

Obliczamy długość odcinka BE (zielony) wykorzystując tw. Pitagorasa:

$$(2\sqrt{2})^2 + 3^2 = x^2$$

$$8 + 9 = x^2$$

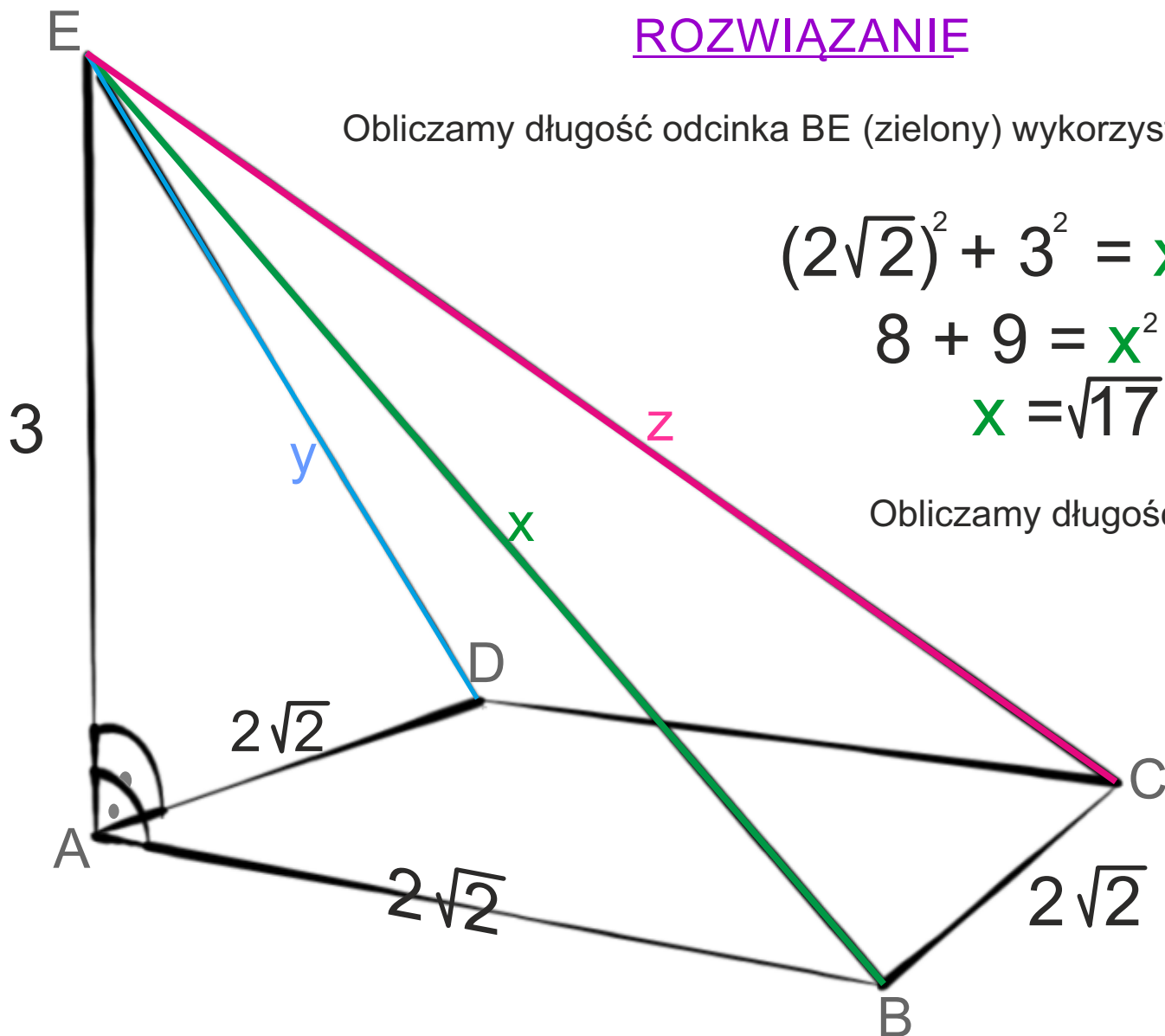
$$x = \sqrt{17}$$

Obliczamy długość odcinka DE (niebieski) wykorzystując tw. Pitagorasa:

$$(2\sqrt{2})^2 + 3^2 = y^2$$

$$8 + 9 = y^2$$

$$y = \sqrt{17}$$



ciąg dalszy



Aby obliczyć długość odcinka CE (różowy) również wykorzystamy tw. Pitagorasa dla trójkąta ACE -
- (zobacz na rysunku), ale najpierw musimy znać długość odcinka AC.

Odcinek AC to przekątna kwadratu (d), którą wyliczymy ze wzoru:

$$d = a\sqrt{2}$$

$$d = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$d = 4$$

Obliczamy długość odcinka CE (różowy) wykorzystując tw. Pitagorasa:

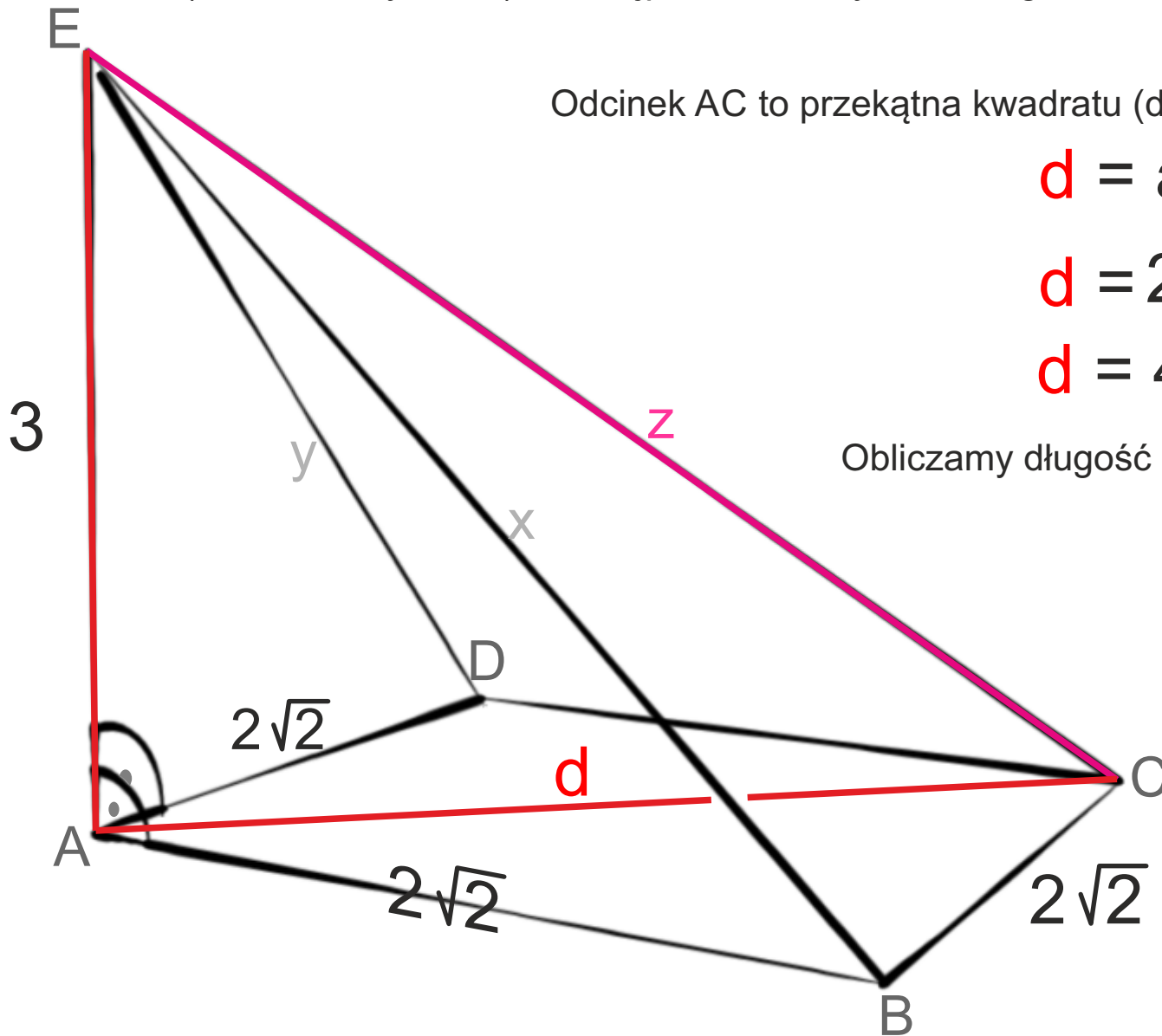
$$4^2 + 3^2 = z^2$$

$$16 + 9 = z^2$$

$$z = 5$$

Teraz możemy już dodać długości
wszystkich krawędzi:

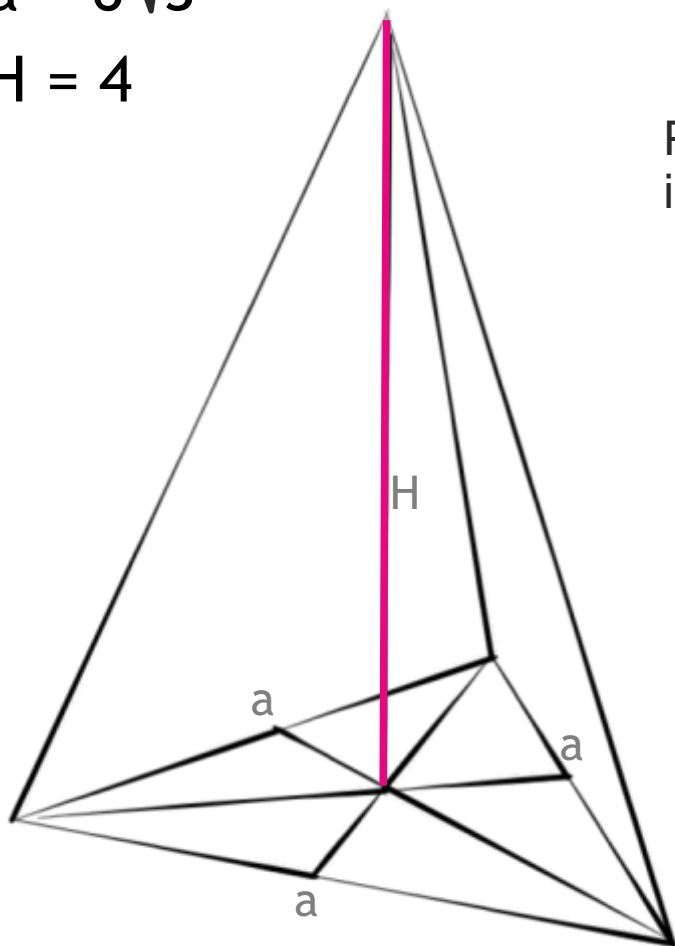
$$4 \cdot 2\sqrt{2} + 3 + 2 \cdot \sqrt{17} + 5 = 8 + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$$



Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

$$a = 6\sqrt{3}$$

$$H = 4$$



ROZWIĄZANIE

Pole pow. ostrosłupa to pole podstawy (trójkąta równobocznego) i pola 3 takich samych trójkątów ze ścian bocznych.

$$P_c = P_p + 3 \cdot P_b$$

Pole podstawy to pole trójkąta równobocznego:

$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6\sqrt{3})^2$$

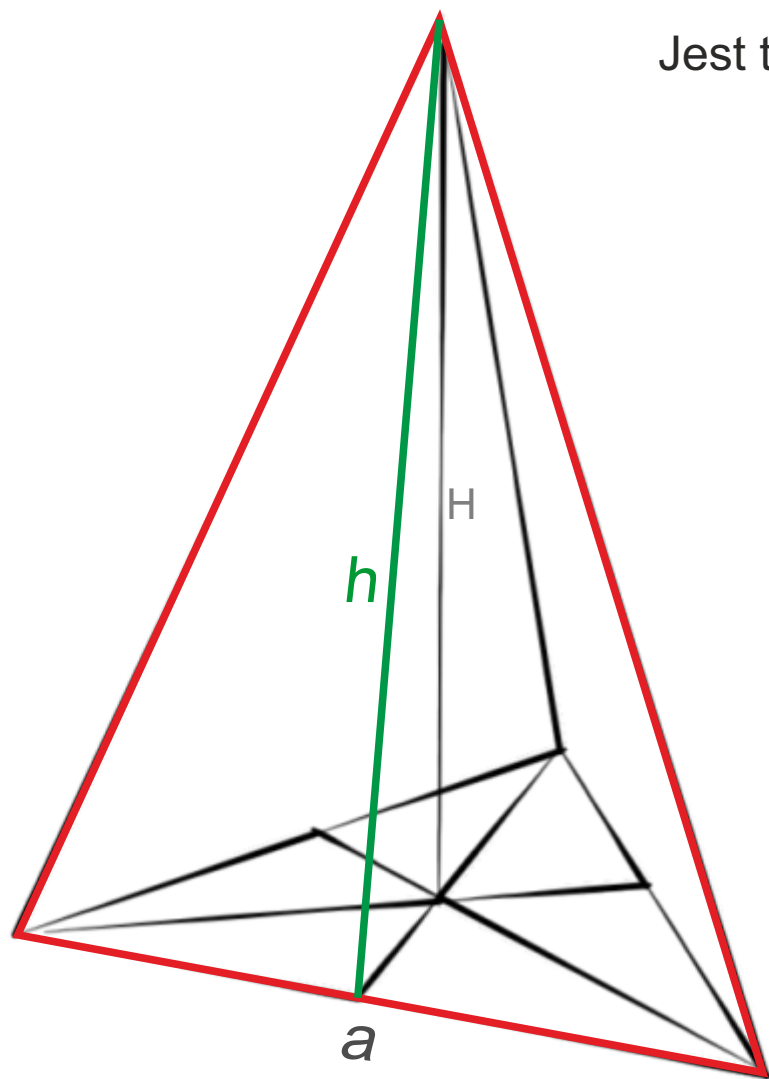
$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 \cdot 3$$

$$P_p = 27\sqrt{3}$$

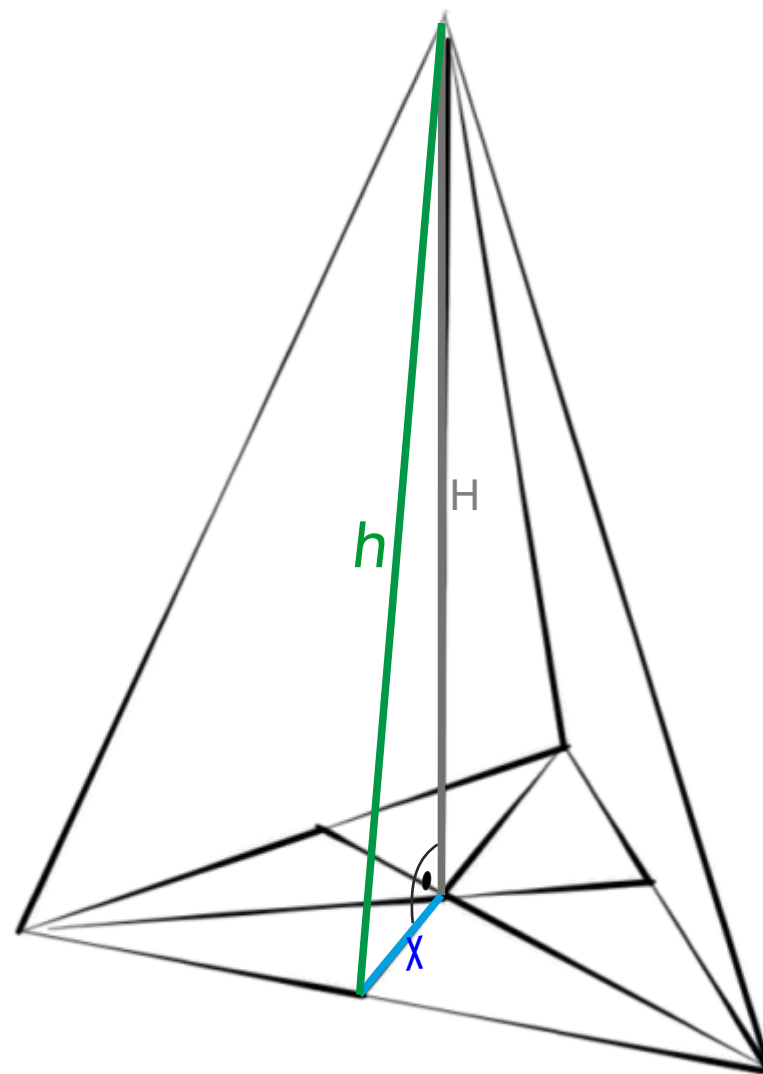
ciąg dalszy



Ściany boczne to 3 takie same trójkąty - wybierzmy jeden z nich (czerwony - ściana "od nas").
Zielony odcinek to wysokość tego trójkąta (h).



Jest tam trójkąt prostokątny (zobacz rysunek po prawej).



ciąg dalszy



(niebieski odcinek to $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta podstawy)

Musimy najpierw obliczyć długość niebieskiego odcinka (czyli $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego w podstawie):

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

UWAGA! To h to wysokość trójkąta w podstawie, a nie h ściany bocznej)

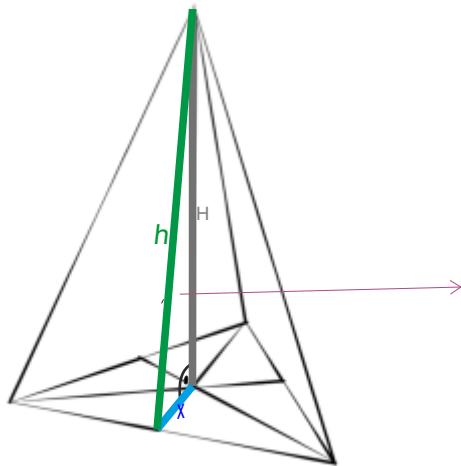
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}}$$

$$h = 9$$

Niebieski odcinek to $\frac{1}{3}$ tej wysokości: $\frac{1}{3} \cdot 9 = 3$

Mamy więc:



To trójkąt egipski - h wynosi 5.

ciąg dalszy



Możemy obliczyć pole ściany bocznej:

$$P_{\Delta} = \frac{ah}{2}$$

$$P_{\Delta} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 5}{2}$$

$$P_{\Delta} = 15\sqrt{3}$$

Teraz obliczamy pole powierzchni całego ostrosłupa:

$$P_c = P_p + 3 \cdot P_b$$

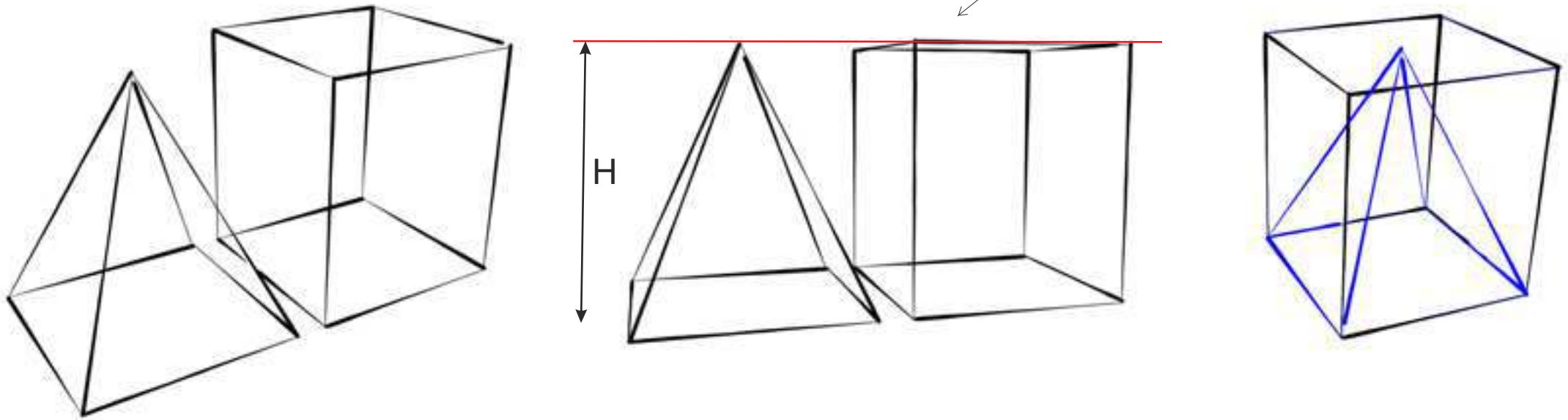
$$P_c = 27\sqrt{3} + 3 \cdot 15\sqrt{3}$$

$$P_c = 72\sqrt{3}$$



Objętość ostrosłupa

Mamy dwie bryły - ostrosłup i graniastosłup - mają taką samą wysokość i podstawę:



Okazuje się, że w takiej sytuacji objętość graniastosłupa jest 3 razy większa od ostrosłupa, lub inaczej mówiąc, objętość ostrosłupa jest 3 razy mniejsza ($\frac{1}{3}$) od objętości graniastosłupa.

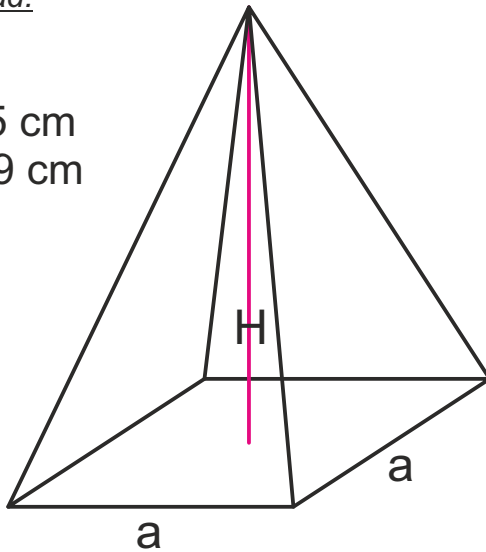
Zobacz filmik ilustrujący tą zależność (kliknij)

Tak więc objętość ostrosłupa będziemy obliczać TAK SAMO jak objętość graniastoslupa o takiej samej podstawie i wysokości, tylko na końcu otrzymany wynik podzielimy przez 3.

$$V = \frac{1}{3} P_p H$$

Przykład:

$a = 5 \text{ cm}$
 $H = 9 \text{ cm}$



$$P_p = a^2$$

$$P_p = 5^2$$

$$P_p = 25$$

$$V = \frac{1}{3} P_p H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 9$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 225$$

$$V = 75 \text{ cm}^3$$